
Decomposição de Helmholtz-Hodge via funções de Green

José Eduardo Cordeiro

José Eduardo Cordeiro

**Decomposição de Helmholtz-Hodge via funções
de Green**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa
de Pós-graduação em Matemática da Universidade
Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Fabiano Petronetto do Carmo

Vitória/ES, Brasil
2018

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

d , José Eduardo Cordeiro, 1988-
Decomposição de Helmholtz-Hodge via funções de Green / José
Eduardo Cordeiro . - 2018.
74 f. : il.

Orientador: Fabiano Petronetto do Carmo .
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal
do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Campos Vetoriais. 2. Método de decomposição. 3.
Problemas de valores de contorno. 4. Funções harmônicas. I. ,
Fabiano Petronetto do Carmo. II. Universidade Federal do
Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

“Decomposição de Helmholtz-Hodge via funções de Green ”

José Eduardo Cordeiro

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 11/10/2018 por:

Prof. Dr. Fabiano Petronetto do Carmo - UFES

Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Junior - UFES

Prof. Dr. Afonso Paiva Neto - ICMC/USP São Carlos

Este trabalho é dedicado à minha filha, Isis.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pois sem Ele eu jamais teria chegado até aqui.

Agradeço à minha família, principalmente aos meus pais, José Reinaldo e Rita, pelo amor incondicional e inestimável apoio em toda minha vida e também às minhas irmãs, Francielly e Fernanda.

Agradeço à minha querida esposa, Janiany, por seu amor e incentivo, e por sua paciência e compreensão pelas horas em que estive ausente. Tenho sorte em tê-la ao meu lado.

Agradeço aos meus amigos, especialmente ao Bruno (Bibacharel), Thiago (Hoje tem ovo no RU!), Enéas (Maioral), e Aaron (Nobel da Física), com os quais obtive grandes momentos de estudo e reflexão sobre os mais variados assuntos, bem como algumas partidas de Munchkin nos finais de semestres. A ordem dos nomes está de forma proposital, pois são raros os momentos em que alguém que foi citado nesse parágrafo e não é o Bruno, nem o Thiago e nem o Enéas não seja o primeiro de uma lista. Até hoje tenho dúvidas de quem foi o que mais se sujou no mangue, há relatos de pessoas que até mergulharam. Reza a lenda que houve até mangue reverso.

Agradeço ao meu orientador, Professor Fabiano, pela paciência, atenção e disponibilidade a mim dispensadas, sua orientação foi fundamental na minha jornada.

Agradeço à todos os servidores da UFES, especialmente os professores com os quais desfrutei da oportunidade de aprender e também a secretária do PPGMAT, Edilane.

Por fim, agradeço à UFES e ao PPGMAT, bem como à CAPES pelo apoio financeiro.

“O Senhor é meu pastor, nada me faltará.”

Resumo

A Decomposição de Helmholtz-Hodge (HHD) de um campo vetorial permite escrevê-lo de maneira única como uma soma de três campos vetoriais, um irrotacional, outro solenoidal e um harmônico. Quando o domínio em questão é limitado, a HHD não é definida de maneira única, tradicionalmente, faz-se necessário o uso de condições de fronteira para a obtenção da unicidade, contudo tal imposição pode tornar o resultado da decomposição muito diferente do esperado. Esta dissertação apresenta a Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge que é a obtenção da HHD sem imposições de condições de fronteira. Usando funções de Green sobre uma extensão infinita do campo combinada com uma análise de influência que as futuras componentes devem ter, é possível obter uma decomposição única sem exigir condições de fronteira. Eliminando assim, eventuais problemas na decomposição que podem ser gerados pelas imposições de condições.

Palavras-chave: Campos Vetoriais. Decomposição de Helmholtz-Hodge. Condições de Fronteira. Unicidade. Campos Harmônicos.

Abstract

Title: Helmholtz-Hodge Decomposition using Green's functions. The Helmholtz-Hodge Decomposition (HHD) describes a vector field as the sum of an incompressible, an irrotational, and a harmonic vector field. Unfortunately, for bounded domains, the HHD is not uniquely defined, traditionally, boundary conditions are imposed to obtain a unique solution, but this imposition may not give a compatible decomposition. This work exposes the natural HHD, which is defined without assuming boundary conditions a priori. Using Green's functions on an infinite extension of the vector field combined with an influence analysis of the components, it's possible to generate a unique decomposition without assuming boundary conditions. As a result, it enables a reliable analysis without problems generated by boundary conditions.

Keywords: Vector Fields. Helmholtz-Hodge Decomposition. Boundary Conditions. Uniqueness. Harmonic Flows.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Máscara da estrela de 5 pontos.	30
Figura 2 – O ponto $(-1, j)$ é um ponto fantasma e deve ser eliminado das equações, em razão de tal ponto não pertencer ao domínio da função.	31
Figura 3 – Solução discreta da equação de Poisson com condições de fronteiras referente ao Exemplo 2.6.	32
Figura 4 – Ilustração da Decomposição de Helmholtz-Hodge de um campo vetorial 2D discreto.	39
Figura 5 – Exemplo para ilustrar a ortogonalidade entre as componentes quando imposta a condição Normal-Paralelo (NP) e a condição Paralelo-Normal (PN).	42
Figura 6 – Exemplo dado por [Wiebel et al., 2004] expondo um problema gerado pela decomposição 2D. Onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ é o campo analítico e $\tilde{\mathbf{r}}$ é a componente advinda da decomposição.	44
Figura 7 – Exposição da dependência de um campo harmônico com relação ao domínio.	44
Figura 8 – Representação da decomposição local.	47
Figura 9 – Ilustração do objetivo da aproximação local, a qual aproxima localmente as componentes no domínio original por componentes obtidas pela decomposição local.	48
Figura 10 – Apresentação dos elementos presentes no boxplot.	51
Figura 11 – Representação da decomposição natural para a componente irrotacional, dado o campo vetorial \mathbf{v} realizamos a convolução com a função de Green para a obtenção do potencial D^* e a seguir obtemos a componente natural \mathbf{d}^* da decomposição natural de Helmholtz-Hodge.	53
Figura 12 – Passo a passo para a obtenção das componentes naturais que exercem influência interna, onde a componente harmônica, que exerce influência externa, é dada por $\mathbf{h}^* := \mathbf{v} - \mathbf{d}^* - \mathbf{r}^*$	53

Figura 14 – Decomposições de Helmholtz-Hodge. Em (a) apresentamos a decomposição de Helmholtz-Hodge utilizando condições de fronteira Paralelo-Normal e o método Gauss Seidel para a resolução dos sistemas lineares. Em (b) mudamos apenas a forma de resolver os sistemas lineares, usamos o método GMRES. E finalmente em (c) apresentamos a decomposição natural. Para cada decomposição lê-se da esquerda para a direita: componente irrotacional, solenoidal e harmônica.	55
Figura 15 – Boxplot da matriz dos erros de fase.	56
Figura 16 – Em azul apresentamos a decomposição usando GS, em ciano usando GMRES e em amarelo a decomposição natural.	56
Figura 17 – Erros absoluto e relativo sobre a componente \mathbf{d} sobre a norma L^2	57
Figura 18 – Representação em cores dos valores referentes ao erro relativo sobre a componente \mathbf{d}	57
Figura 19 – Análise de convergência da componente harmônica em relação ao divergente. O refinamento se deu pelo aumento da partição para cada instante, sendo portanto os valores dados por $2^l \times 2^l$ onde $l \in \{4, \dots, 10\}$	58
Figura 20 – $\mathbf{v} = \mathbf{d}^* + \mathbf{r}^* + \mathbf{h}^*$, as figuras menores representam o campo analítico. . .	59
Figura 21 – Campo vetorial \mathbf{v}	60
Figura 22 – Componentes provenientes da decomposição natural	60
Figura 23 – Boxplot do rotacional e divergente sobre a componente \mathbf{h}^*	61
Figura 24 – Representação do escoamento do fluido. Os destaques são referentes a decomposição local, a cor verde representa a região dada por Ω_1 e a região em amarelo representa Ω_2	61
Figura 25 – Componente irrotacional natural (a), componente solenoidal natural (b). Apresentamos em (c) o boxplot dos erros obtidos pela componente harmônica natural que conta os erros gerados ao longo de todo processo. . . .	62
Figura 26 – Apresentação da componente \mathbf{r}^* da decomposição realizada em Ω_1 (a) e a decomposição realizada em Ω_2 (b) bem como o boxplot dos erros absolutos. As figuras menores correspondem a restrição de Ω a região em questão.	63
Figura 27 – Fluxograma representativo das decomposições locais para a utilização na aproximação local.	64
Figura 28 – Decomposições restritas à Ω_1 . Onde (a) é a \mathbf{HHD}^* realizada em Ω_1 , (b) é a \mathbf{HHD}^* realizada em Ω restrita à Ω_1 e (c) é a \mathbf{HHD}^* realizada em Ω_2 restrita à Ω_1	64
Figura 29 – Um campo vetorial \mathbf{v} decomposto de duas maneiras, por \mathbf{HHD} com condições de Dirichlet (linha superior) e a \mathbf{HHD}^* (linha inferior). A primeira coluna refere-se à componente irrotacional, a segunda à solenoidal e a terceira à harmônica.	65

Figura 30 – $\mathbf{v} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0$	66
Figura 31 – Singularidades sobre o campo usado no exemplo 4.4.	67
Figura 32 – Análise de convergência dos operadores diferenciais, gradiente e divergente. O refinamento se deu pelo aumento da partição para cada instante, sendo os valores dados por $2^l \times 2^l$ onde $l \in \{4, \dots, 10\}$	73

Lista de tabelas

Tabela 1	– Existência e unicidade de soluções das Equações de Laplace e Poisson para cada uma das condições de fronteira.	23
Tabela 2	– Erro angular da componente h , valores em radiano.	55
Tabela 3	– Análise estatística da componente h , as três linhas superiores estão em radiano.	56
Tabela 4	– Tabela de valores dos quartis em relação aos erros relativos de d	57
Tabela 5	– Teste da ortogonalidade L^2	58
Tabela 6	– Posições das singularidades do campo usado no Ex. 4.1 por cada método com partição de 80×80	66
Tabela 7	– Posições das singularidades do campo usado no Ex. 4.1 pelos métodos HHD* e GMRES, com partição de 1024×1024	66

Lista de Símbolos

◆ - identificação para o término de um exemplo;

$B(a, r)$ - bola euclidiana de centro a e raio r ;

$V_n(r)$ - volume da bola euclidiana n -dimensional de raio r ;

$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ - produto interno no \mathbb{R}^n ;

∂U - fronteira do conjunto U ;

\overline{U} - $U \cup \partial U$, fecho do conjunto U ;

U^c - complementar do conjunto U em relação ao \mathbb{R}^n ;

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - o conjunto das transformações lineares de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n ;

∇f - gradiente de uma função f escalar;

$\nabla \cdot F$ - divergente de um campo F vetorial;

$\nabla \times F$ - rotacional de um campo F vetorial;

$\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ - laplaciano de f com relação a variável \mathbf{x} (\mathbf{y} é constante);

$\int_U F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$ - integração da função F sobre U com respeito a \mathbf{y} (\mathbf{x} é constante);

$\oint_U F(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$ - valor médio da função F sobre U com respeito a \mathbf{y} ;

$\mathcal{O}(h^n)$ - resíduo de n -ésima ordem;

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	NOÇÕES PRELIMINARES	18
2.1	Equações Diferenciais Parciais	18
2.2	Campos Vetoriais e Escalares	24
2.3	Métodos de Diferenças Finitas	25
2.4	Funções de Green	32
3	A DECOMPOSIÇÃO NATURAL DE HELMHOLTZ-HODGE	38
3.1	A Decomposição de Helmholtz-Hodge	39
3.2	Entendendo o campo Harmônico	43
3.3	A Decomposição Natural	45
4	RESULTADOS	50
4.1	Dados de implementação	52
4.2	Resultados	54
4.3	Identificação de Singularidades	65
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	70
A	CONVERGÊNCIA DOS OPERADORES	73

Introdução

Campos vetoriais estão presentes em muitos momentos do nosso dia-a-dia, como a descrição matemática da velocidade que o sangue corre em nossas veias bem como do deslocamento de ar gerado pelo bater das asas de uma borboleta. Embora tais exemplos sejam simples, em muitas áreas de pesquisas os campos vetoriais são os objetos principais de estudo, como visualização de campos vetoriais, ramos da aerodinâmica, oceanografia e etc ([Merzkirch, 2012],[Choi et al., 2009]). Desses estudos se fez necessário a visualização e/ou análises de fluxos de maneira a obter propriedades importantes dos mesmos, a partir daí sugeriram vários métodos para tais finalidades.

Em 1858, Hermann von Helmholtz apresentou um artigo¹ que explanou como funções potenciais podem ser utilizadas para extrair componentes rotacionais e irrotacionais de um fluxo. Para isso, Helmholtz explicou que o movimento de um elemento de volume de um fluido contínuo tridimensional consiste em: uma expansão ou contração em três direções ortogonais, rotação sobre um eixo e uma translação. Em 1932, [Lamb, 1932] formulou o que chamaremos de *Teorema da Decomposição de Helmholtz* de campos vetoriais, o qual diz que sobre algumas hipóteses no infinito, o campo pode ser decomposto de maneira única em uma componente livre de rotação e outra livre de divergência. Em 1963 [Ladyzhenskaya, 1963] formulou o teorema que chamaremos de *Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge* de campos vetoriais, o qual diz que um campo vetorial suave sobre um domínio limitado pode ser decomposto em uma componente livre de rotação, outra livre de divergência e uma componente harmônica, neste caso a garantia da unicidade está relacionado com a imposição de condições de fronteira. Há também a *Decomposição de Hodge*, que ao invés de campos vetoriais, trabalha sobre formas diferenciais. Nesta dissertação nos concentraremos apenas nas duas primeiras decomposições.

A Decomposição de Helmholtz-Hodge (em inglês, Helmholtz-Hodge Decomposition, HHD) de campos vetoriais simplifica a análise dos campos vetoriais, pois propriedades importantes como incompressibilidade e vorticidade podem ser estudadas diretamente em

¹ O artigo publicado em 1858 foi [Helmholtz, 1858] o qual teve uma tradução para o inglês em 1867 [Helmholtz, 1867].

cada componente, diante disso muitos pesquisadores consideram esse teorema como um dos teoremas fundamentais em dinâmica dos fluidos.

Algumas características dos fluxos também podem ser exploradas pela HHD, como as singularidades [Polthier and Preuß, 2003], que representam umas das mais importantes feições características dos campos vetoriais. Elas determinam o comportamento físico e permitem uma caracterização topológica do fluxo, por exemplo, as singularidades como vórtices, fontes e sorvedouros podem ser detectadas e analisadas de maneira a compreender o comportamento do fluxo.

O estudo da HHD passa pelo estudo de campos vetoriais e operadores diferenciais terminando em problemas de Poisson. Para resolver tais problemas, muitas vezes difíceis ou até mesmo impossíveis por meio de funções elementares, utilizamos métodos discretos para aproximar numericamente a solução. Logo são necessários métodos que basicamente deem meios para a discretização do domínio, do campo vetorial e dos operadores diferenciais.

Um método muito utilizado é o Método de Diferenças Finitas (MDF), o qual utiliza basicamente a expansão de funções em Séries de Taylor e combinações lineares. Na década de 50 Courant já o utilizava para aproximar as soluções de uma equação diferencial não-linear hiperbólica ([Courant et al., 1952]).

Para o caso de um domínio não retangular, a implementação usando MDF pode tornar-se muito complexa (mesmo em domínios estruturados), pois pode ser necessário a utilização de métodos de interpolação ou extrapolação por exemplo. Contudo o Método de Elementos Finitos (MEF) trabalha muito bem nesses casos. A ideia central do MEF é aproximar o domínio por uma união de um número finito de elementos e resolver um problema associado ao inicial. Polthier em 2003 propôs uma nova implementação da HHD usando novas definições para o divergente e rotacional discreto via MEF sobre uma superfície ([Polthier and Preuß, 2003]).

Por último, o Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) que inicialmente foi utilizado para resolver problemas de astrofísica, mas atualmente já se verifica aplicações nas mais diversas áreas como dinâmica dos fluidos, mecânica dos sólidos e computação gráfica. No método SPH o domínio de um problema é representado por um conjunto de partículas definidas como pontos que discretizam tal domínio e são totalmente livres de malha. Cada partícula contém, além da geometria do espaço, outras informações do problema tais como propriedades físicas. Assim permitindo o método ser utilizado em uma distribuição aleatória de partículas. Petronetto em 2010 ([Petronetto et al., 2010]) apresentou uma nova abordagem à HHD usando o SPH para a análise de um campo vetorial bidimensional.

Esses e outros métodos podem ser encontrados em [Bhatia et al., 2013b] com o objetivo de obter a decomposição de Helmholtz-Hodge.

Devido a maioria dos problemas abordarem domínios limitados, diferentes condições de fronteiras podem ser utilizadas com o objetivo de obter a unicidade na decomposição,

logo os impactos da imposição de tais condições devem ser estudados. E mais, algumas aplicações definem campos com condições de contorno complexas ou até mesmo desconhecidas durante a análise de tais campos, como por exemplo, a exigência que os valores na fronteira correspondam ao valor da derivada da função - ainda desconhecida.

Além disso, para o caso de campos bidimensionais [Wiebel et al., 2004] observaram uma falha na decomposição. Mais especificamente, eles mostraram que para pontos críticos próximos ou sobre a fronteira do domínio, a estrutura das componentes podem ter mudanças significativas, comprometendo a análise do campo. [Bhatia et al., 2014] argumentam que tais problemas devem ser atribuídos a imposição das condições de fronteira, as quais impõem a necessidade de manter a ortogonalidade das componentes. Em aplicações práticas, porém, os campos são definidos sobre domínios limitados, onde a unicidade da HHD é obtida a partir de condições de fronteira, logo faz-se necessário o uso de novos métodos na tentativa de que tais erros não aconteçam.

Esta dissertação apresenta uma estratégia proposta por [Bhatia et al., 2014] para obter a HHD para um campo a partir de uma extensão ilimitada do mesmo (sem a imposição de condições de fronteira), obtendo assim, a unicidade da decomposição. Tal estratégia utiliza as funções de Green e considera que o campo é a soma de componentes definidas a partir de influências interna e externa a um domínio limitado. Em métodos tradicionais, a abordagem de impor condições de contorno é equivalente a presumir conhecer a influência externa, levando a uma decomposição única do campo devido a influência interna. Usando essa abordagem, os dados das componentes da decomposição na fronteira são determinados de maneira espontânea (natural).

Esta dissertação está organizada nos seguintes capítulos:

- Capítulo 2 - São apresentados os conceitos fundamentais de Equações Diferenciais Parciais e de campos escalares e vetoriais. Apresentamos também os métodos de discretização por diferenças finitas e a discretização de operadores diferenciais. E por fim, exibimos as funções de Green e expomos sua importância em um caso particular de Equações Diferenciais Parciais.
- Capítulo 3 - Definimos a Decomposição de Helmholtz-Hodge, apresentamos o problema no caso bidimensional e definimos a Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge como uma solução. Definimos também a decomposição e aproximação local de campos vetoriais.
- Capítulo 4 - Definimos a HHD por imposição de condição de fronteira e apresentamos a maneira como implementamos ambas as decomposições. Aplicamos as decomposições em exemplos analíticos para realizar uma análise comparativa dos métodos. Por último, aplicamos a decomposição de Helmholtz-Hodge para obter singularidades dos campos potenciais que representam feições características do campo vetorial.

Noções Preliminares

2.1 Equações Diferenciais Parciais

Esta é uma seção de apresentação dos conceitos de análise no \mathbb{R}^n e Equações Diferenciais Parciais (EDP) que utilizaremos ao longo do trabalho. Um texto completo sobre o conteúdo apresentado nesta seção pode ser encontrado em [Lima, 2014].

Diferenciabilidade de funções reais de n variáveis

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dado um ponto $\mathbf{a} \in \Omega$, a i -ésima derivada parcial de f em \mathbf{a} (onde $1 \leq i \leq n$) é o limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t},$$

quando tal limite existe. Notações muito utilizadas para a derivada parcial são f_{x_i} e $\partial_{x_i} f$. Podemos definir a derivada da função f na direção de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ qualquer. A *derivada direcional* de f no ponto \mathbf{a} , segundo o vetor \mathbf{u} , é definida pelo limite

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t},$$

quando tal limite existe.

Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $\mathbf{a} \in \Omega$. Dizemos que a função f é *diferenciável no ponto \mathbf{a}* quando existe um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tal que, para todo vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{a} + \mathbf{u} \in \Omega$, se tenha

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + r(\mathbf{u})$$

onde $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = 0$. Quando f é diferenciável em todos os pontos de Ω , dizemos simplesmente que f é *diferenciável*. Se f é diferenciável no ponto \mathbf{a} então, tomando $\mathbf{u} = t\mathbf{e}_i$ temos $u_j = 0$ se $j \neq i$ e $u_i = t$. Logo

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} = a_i + \frac{r(t\mathbf{e}_i)}{t} = a_i \pm \frac{r(t\mathbf{e}_i)}{\|t\mathbf{e}_i\|}.$$

Fazendo $t \rightarrow 0$, vemos que existe cada derivada parcial de f no ponto \mathbf{a} , sendo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = a_i$. Portanto a definição a seguir é equivalente a anterior. Diremos que a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $\mathbf{a} \in \Omega$ quando existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})$ e além disso, para todo vetor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{a} + \mathbf{u} \in \Omega$, se tenha

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot u_n + r(\mathbf{u})$$

onde $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = 0$.

Uma função real $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, diz-se de *classe* $C^1(\Omega)$ quando existem em cada ponto $\mathbf{a} \in \Omega$ as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})$ e as n funções $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas. Mais geralmente, diremos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de *classe* $C^q(\Omega)$ quando ela possuir derivadas parciais em todos os pontos de Ω e as funções $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ forem de classe $C^{q-1}(\Omega)$, onde q é um inteiro positivo. Por fim, diremos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de *classe* $C^0(\Omega)$ quando ela for contínua. Usaremos a notação $f \in C^q(\Omega)$ (ou simplesmente $f \in C^q$ caso não haja ambiguidade) para indicar que a função f é de classe C^q , para o caso em que $f \in C^q$ para todo $q \geq 0$ chamamos f de *suave*.

Teorema 2.1. Toda função de classe C^1 é diferenciável.

Se todas as funções $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis num ponto $\mathbf{a} \in \Omega$, diz-se que f é *duas vezes diferenciável em* \mathbf{a} . Neste caso, existem as *derivadas parciais de segunda ordem*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\mathbf{a}).$$

Teorema 2.2 (Teorema de Schwarz). Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no ponto \mathbf{a} do aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$, tem-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{a})$$

Em todo ponto $\mathbf{a} \in \Omega$ onde existem as derivadas parciais de segunda ordem da função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, os números $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\mathbf{a})$ formam uma matriz $\mathbf{h}(\mathbf{a}) = [h_{ij}(\mathbf{a})]$, chamada a *matriz hessiana* da função f e definimos o seu traço como sendo o *laplaciano de* f , em símbolos,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} (\mathbf{a}).$$

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, diferenciável no ponto $\mathbf{a} \in \Omega$. A *diferencial* de f em \mathbf{a} é o funcional linear $Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, cujo valor no vetor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ é dado por

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\mathbf{a}) \cdot u_i.$$

Como toda transformação linear, o funcional linear $Df(\mathbf{a})$ possui uma matriz $1 \times n$ associada a Df em relação à base canônica de \mathbb{R}^n , chamada de *matriz jacobiana* de f no ponto \mathbf{a} ,

$$Df(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right),$$

vale ressaltar que o vetor cujas entradas são as colunas de Df é chamado de *gradiente* de f denotado por ∇f , em símbolos

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Quando $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto de Ω , obtemos uma aplicação $Df(\mathbf{a}) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, que associa a cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ o funcional $Df(\mathbf{x})$, cuja matriz é

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right),$$

a aplicação Df é contínua se, e somente se, cada uma das suas funções coordenadas $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o for, isto é, se, e somente se, f é de classe C^1 .

Fórmula de Taylor

Sejam Ω aberto do \mathbb{R}^n e $\mathbf{a} \in \Omega$, para todo $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ a fórmula de Taylor para uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pela seguinte expressão

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})u_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})u_i u_j + r(\mathbf{u}) \quad (1)$$

com $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} = 0$.

Para o caso especial $n = 1$, dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^q no intervalo $\Omega \subset \mathbb{R}$ e fixado $a \in \Omega$, o polinômio

$$P_q(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(q)}(a)}{q!}(x - a)^q \quad (2)$$

chama-se *polinômio de Taylor*, de ordem q , de f em a .

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange: Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{q+1} no intervalo $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $x, a \in \Omega$. Então existe ξ no intervalo aberto de extremos x e a tal que

$$f(x) = P_q(x) + \frac{f^{(q+1)}(\xi)}{(q+1)!}(x - a)^{q+1}$$

e fazendo a substituição $h = x - a$ temos

$$f(a + h) = P_q(a + h) + \frac{f^{(q+1)}(\xi)}{(q+1)!}h^{q+1} \quad (3)$$

Diferenciabilidade de aplicações vetoriais de m variáveis

Diz-se que a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto, é *diferenciável* no ponto $\mathbf{a} \in \Omega$ quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + T \cdot \mathbf{u} + r(\mathbf{u}), \quad \text{com} \quad \lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = 0, \quad \mathbf{a} + \mathbf{u} \in \Omega.$$

Dadas as condições acima, é fácil ver que

$$T \cdot \mathbf{u} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

e portanto a transformação T é única. Chamamos T de *derivada* de f no ponto \mathbf{a} e denotamos por $f'(\mathbf{a})$ ou $Df(\mathbf{a})$. A aplicação f é diferenciável no ponto \mathbf{a} se, e somente se, cada uma de suas coordenadas f_i o for. A matriz associada a $T = Df(\mathbf{a})$ em relação às bases canônicas chama-se *matriz jacobiana* de f no ponto \mathbf{a} e é indicada por $Jac(f(\mathbf{a}))$ ou por abuso de notação, simplesmente $Df(\mathbf{a})$, cujo o elemento (i, j) desta matriz é o número $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$.

A aplicação f é *diferenciável em Ω* quando ela for diferenciável em todos os pontos de Ω . Deste modo, defini-se então a *aplicação derivada*

$$\begin{aligned} Df : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ \mathbf{x} &\longmapsto Df(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Se Df tem derivada no ponto $\mathbf{a} \in \Omega$, dizemos que f é *duas vezes diferenciável no ponto \mathbf{a}* e escrevemos $D^2f(\mathbf{a})$ para indicar a derivada de Df em \mathbf{a} . Note que dada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\|T\| = \sup\{\|T \cdot \mathbf{u}\|; \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{u}\| = 1\}$ define uma norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Dados $q, m, n \in \mathbb{N}$, uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser de *classe $C^q(\Omega)$* , e escrevemos $f \in C^q(\Omega)$, se todas as derivadas parciais de ordem até q existem e forem contínuas em Ω . Caso não haja ambiguidade escreveremos apenas $f \in C^q$. Se f é de classe C^q para todo q , então f é chamada de *suave* e escrevemos $f \in C^\infty$. Usamos também a notação

Se $m = n$ definimos o *divergente de f* , $\nabla \cdot f$, como sendo o traço da matriz $Df(\mathbf{a})$, ou seja,

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{a}).$$

E obtemos dois importantes teoremas,

Teorema 2.3 (Teorema do Divergente). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com borda suave. Então, para qualquer $f \in C^1$ em $\overline{\Omega}$, vale

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, dS$$

onde ν é o vetor normal unitário apontando para fora de Ω em $\partial\Omega$.

Teorema 2.4 (Fórmula da Integração por Partes). Sejam $u, v \in C^1$ em $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ com valores reais. Então

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \nu_i(\mathbf{x}) dS$$

onde $\nu(\mathbf{x}) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário apontando para fora de Ω em $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em $\mathbf{x} \in \Omega$, com $f(\Omega) \subset \tilde{\Omega}$, e $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável em $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \tilde{\Omega}$. Então a aplicação composta $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em \mathbf{x} e vale a *Regra da Cadeia*, $(g \circ f)'(\mathbf{x}) = g'(\mathbf{y}) \circ f'(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Considerando as matrizes jacobianas de $f, g, g \circ f$ obtemos

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Equações Diferenciais Parciais

Uma EDP é uma equação que exprime uma relação entre uma função incógnita de várias variáveis e suas derivadas com relação a essas variáveis.

Dentro da Matemática Aplicada, as Equações Diferenciais têm um papel relevante na ligação e interação com outras Ciências, desde sua origem, geralmente em problemas ligados à Física até sua aplicação em alguns ramos da Engenharia, Química, Economia, Medicina e etc. É comum deparar-se com equações diferenciais parciais que regem um fenômeno físico, mas cujas soluções analíticas envolvem casos de contorno e geometria bastante complicadas ou até mesmo impossíveis de serem resolvidas. Nestes casos, é comum recorrer às soluções aproximadas obtidas por meio da aplicação de métodos numéricos.

O objetivo é encontrar uma solução numérica bastante próxima da solução exata do problema, visando sempre diminuir o erro entre as duas soluções. Inúmeros são os métodos numéricos utilizados nos dias de hoje para solução de problemas científicos, podendo atuar diretamente ou indiretamente sobre a equação diferencial que modela o problema real. Um dos mais popularmente utilizados e também estudado durante a realização deste trabalho é o *Método das Diferenças Finitas* (MDF)

Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^2 . Uma expressão da forma

$$\mathbf{F}(x, y, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_{xx}, \mathbf{u}_{xy}, \mathbf{u}_{yy}) = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

é chamada de *equação diferencial parcial de segunda ordem*, onde \mathbf{F} é dada e $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é desconhecida. Resolver uma EDP é encontrar todas as funções \mathbf{u} que satisfaçam a Equação 4 em Ω .

Entre as EDPs mais importantes estão a *Equação de Laplace*

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad (5)$$

e a *Equação de Poisson*

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad (6)$$

onde Δ é o operador laplaciano e temos as seguintes notações $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u$, $u \in C^2(\Omega)$ e a função f é chamada de fonte. As funções que satisfazem a Equação 5 são chamadas de *funções harmônicas*.

Considere a equação na fronteira do domínio

$$\alpha u(x, y) + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (7)$$

onde são dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e g contínua em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada de u na direção normal a $\partial\Omega$. Quando além de resolver a EDP impomos que a solução satisfaça a Equação 7, temos um *problema de condição de fronteira* ou um *problema de contorno*. Se $\beta = 0$, chamamos de condição de Dirichlet; se $\alpha = 0$, chamamos de condição de Neumann; do contrário, chamamos de condição de Robin ou Mista. Por vezes fazemos tais imposições para escolher um subconjunto do conjunto solução ou ainda a unicidade¹ da solução (vide Tabela 1).

	Equações Laplace e Poisson
Dirichlet	Existe uma única solução
Neumann	Existe uma única solução (a menos de constante)
Mista	Existe uma única solução

Tabela 1 – Existência e unicidade de soluções das Equações de Laplace e Poisson para cada uma das condições de fronteira.

Devemos ter um cuidado quando nos deparamos com um problema de contorno em que a condição de fronteira é puramente Neumann, pois tal problema pode não ter solução por ser um problema inconsistente. De fato, observe que ao integrarmos a Equação 6 sobre Ω obtemos

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u_{xx}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} u_{yy}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

e usando a fórmula da integração por partes (Teo. 2.4) no lado direito com $v(\mathbf{x}) = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i x_i}$ temos

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \nu_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \nu_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (\nu_1, \nu_2) d\mathbf{x}$$

portanto

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \frac{1}{\beta} \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (8)$$

Diante disso, quando não sabemos de onde vem o problema de contorno, devemos sempre fazer a checagem acima.

¹ http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116C/Laplace_12.pdf

2.2 Campos Vetoriais e Escalares

Um campo escalar (vetorial) é uma aplicação que associa um escalar (vetor) a cada ponto de um domínio. Os campos vetoriais e escalares são facilmente encontrados na física, por exemplo, um campo magnético ou o movimento de um fluido podem ser representados por campos vetoriais; por outro lado, temperatura e pressão podem ser representados por campos escalares. Em símbolos, um campo escalar é uma função do tipo $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e um campo vetorial é uma função do tipo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 2$.

Conjuntos de campos vetoriais podem ser definidos de acordo com propriedades especiais dadas por operadores diferenciais. Alguns desses grupos são descritos abaixo.

Campo vetorial potencial: Um campo vetorial \mathbf{v} é chamado de *potencial* se existe um campo escalar φ tal que

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi,$$

o campo escalar φ é então chamado de potencial escalar de \mathbf{v} . Se um campo vetorial \mathbf{v} está definido sobre um domínio simplesmente conexo, então \mathbf{v} é um campo potencial se, e somente se, \mathbf{v} é um campo *irrotacional*

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Vale mencionar que pela definição acima, o campo escalar associado a um campo vetorial potencial não é único. Como

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi = \nabla(\varphi + c)$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, o potencial escalar φ é definido a menos de uma constante.

Campo vetorial solenoidal: Um campo vetorial \mathbf{v} é chamado de *solenoidal* quando é dado pelo rotacional de um outro campo vetorial Ψ

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi,$$

o campo Ψ é então chamado de potencial vetorial de \mathbf{v} . Um campo vetorial \mathbf{v} é solenoidal se, e somente se, o divergente de \mathbf{v} é nulo, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

de maneira análoga, o potencial vetorial é definido a menos de um campo gradiente, pois

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi = \nabla \times (\Psi + \nabla \psi)$$

para qualquer campo escalar ψ .

Campo vetorial harmônico: Um campo vetorial \mathbf{v} que satisfaz a equação vetorial de Laplace ($\vec{\Delta} \mathbf{v} = 0$) é chamado de *campo vetorial harmônico*. Podemos escrever $\vec{\Delta} \mathbf{v} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$, portanto para que um campo vetorial seja harmônico é suficiente

que seja tanto irrotacional quanto solenoidal. Em um domínio simplesmente conexo um campo harmônico \mathbf{v} é o gradiente de um potencial escalar, que satisfaz a equação de Laplace

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi \quad \Delta\varphi = 0.$$

Portanto, um campo harmônico é chamado também de campo Laplaciano. Ainda sobre um domínio simplesmente conexo, dada as definições de campos vetoriais potenciais e solenoidais, é fácil ver que um campo harmônico satisfaz $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

2.3 Métodos de Diferenças Finitas

Para resolvermos equações diferenciais geralmente utilizamos artifícios numéricos para tal. Portanto é necessário um processo de transferência de objetos contínuos para objetos discretos, chamamos esse processo de *discretização*. Para resolvermos uma EDP numericamente precisamos discretizar a função incógnita, a equação diferencial e o domínio. A discretização do domínio é obtida pela subdivisão deste em um conjunto de pontos, em geral igualmente espaçados, ao qual daremos o nome de *malha*. A discretização da função incógnita e da EDP são obtidas, respectivamente, pela avaliação desta nos pontos da malha e pela aproximação das derivadas. Neste trabalho usaremos o método de diferenças finitas para resolvermos uma EDP numericamente. Nesta seção apresentaremos os conceitos necessários para a utilização deste método. Um texto completo sobre o conteúdo apresentado nesta seção pode ser encontrado em [Cuminato and Meneguetto, 2013].

Fórmulas de Diferenças

Começamos apresentando o método para funções reais obtendo as fórmulas de diferenças para o caso unidimensional.

Caso unidimensional: Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e n um número natural. Definimos a malha do intervalo $[a, b]$ com respeito ao número n (partição) como o conjunto dos pontos

$$x_i = a + ih,$$

com $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $h = \frac{b-a}{n}$ é chamado de *passo*.

Tomando $q = 1$ na Fórmula de Taylor com resto de Lagrange (Eq. 3) e reordenando obtemos uma aproximação para a derivada $f'(x)$, conhecida como *fórmula progressiva*, que é dada por

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(\xi) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi).$$

Substituindo h por $-h$ obtemos a *fórmula regressiva*

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(\xi) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2}f''(\xi).$$

Para $q = 2$ na Equação 3 com h e $-h$ temos respectivamente

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_2)$$

Fazendo $f(x+h) - f(x-h)$ e isolando f' temos a *fórmula centrada*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f'''(\xi)$$

onde $\xi \in (x-h, x+h)$.

Fica claro através das definições que tanto a fórmula progressiva quanto a regressiva têm resíduo de ordem 1, isto é, $\mathbf{O}(h^1)$. Enquanto a fórmula centrada tem resíduo de ordem 2.

Caso bidimensional: Sejam $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ e n, m números naturais. Definimos a malha de R com respeito aos números n, m como o conjunto

$$(x_i, y_j) = (a + ih, c + jk),$$

com $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, $h = \frac{b-a}{n}$ e $k = \frac{d-c}{m}$.

Considere $u : R \rightarrow \mathbb{R}$ suave, para y fixado, podemos escrever $u(x, y) = f(x)$ e utilizar o caso unidimensional em f , obtemos então as seguintes fórmulas com $q = 1$ na Equação 3

progressiva:

$$u_x(x, y) = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{h}{2}u_{xx}(\xi_1, y), \quad \xi_1 \in (x, x+h) \quad (9)$$

regressiva:

$$u_x(x, y) = \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h} + \frac{h}{2}u_{xx}(\xi_2, y), \quad \xi_2 \in (x-h, x) \quad (10)$$

e com $q = 2$ na Equação 3 obtemos a fórmula

centrada:

$$u_x(x, y) = \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h} - \frac{h^2}{6}u_{xxx}(\xi, y), \quad \xi \in (x-h, x+h). \quad (11)$$

Note também que para $q = 2$ na Equação 3, se somarmos $u(x+h, y) + u(x-h, y)$ e isolarmos u_{xx} temos

$$u_{xx}(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi, y). \quad (12)$$

Argumentos análogos podem ser feitos para a segunda coordenada.

Operadores Diferenciais por Diferenças Finitas

Como os métodos de diferenças finitas consiste em substituir as derivadas analíticas por aproximações, podemos pensar nos operadores diferenciais: gradiente e divergente; por diferenças finitas. Como trabalhamos apenas com campos bidimensionais veremos mais adiante que o rotacional para tais campos pode ser “substituído” pelo divergente.

Gradiente

Analiticamente, dado um campo potencial $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o gradiente de f é dado por $\nabla f = (f_x, f_y)$. Dada uma matriz f , $m \times n$, com passo h em x e k em y , implementamos o gradiente usando o método de diferenças finitas da seguinte forma, quando possível usamos a diferença centrada, do contrário usamos uma equação de diferenças que mantenha o resíduo com ordem pelo menos 2. Apresentamos nas Equação 13 as aproximações para as funções f_x e f_y sem mencionar os resíduos, uma vez que desejamos representar as aproximações.

$$f_x(x_i, y_j) = \begin{cases} -\frac{f(x_2, y_j) - 4f(x_1, y_j) + 3f(x_0, y_j)}{2h}, & \text{se } i = 0 \\ -\frac{f(x_{n-2}, y_j) - 4f(x_{n-1}, y_j) + 3f(x_n, y_j)}{2h}, & \text{se } i = n \\ \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{2h}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (13)$$

e

$$f_y(x_i, y_j) = \begin{cases} -\frac{f(x_j, y_2) - 4f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_0)}{2k}, & \text{se } j = 0 \\ -\frac{f(x_i, y_{m-2}) - 4f(x_i, y_{m-1}) + 3f(x_i, y_m)}{2k}, & \text{se } j = m \\ \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_{j-1})}{2k}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14)$$

Exemplo 2.5. Tomando $h = k = 0.1$ e

$$f = \begin{bmatrix} 0.8147 & 0.0975 & 0.1576 & 0.1419 & 0.6557 \\ 0.9058 & 0.2785 & 0.9706 & 0.4218 & 0.0357 \\ 0.1270 & 0.5469 & 0.9572 & 0.9157 & 0.8491 \\ 0.9134 & 0.9575 & 0.4854 & 0.7922 & 0.9340 \\ 0.6324 & 0.9649 & 0.8003 & 0.9595 & 0.6787 \end{bmatrix}$$

temos por exemplo que

$$f_x(x_0, y_2) = -\frac{0.9572 - 4 \times 0.5469 + 3 \times 0.1270}{2 \times 0.1} = 4,2470$$

desta maneira, obtemos a matriz derivada de f com relação a variável x

$$f_x = \begin{bmatrix} -11.0581 & -3.2856 & 0.2217 & 2.4906 & 7.7864 \\ -12.8699 & 0.3240 & 0.7163 & -4.6744 & -3.0466 \\ 4.2470 & 4.1509 & 1.8443 & -0.5402 & -0.7919 \\ 3.0226 & -2.1400 & -0.8265 & 2.2431 & 0.5926 \\ 5.8110 & 0.8396 & -0.0270 & -0.6077 & -5.0074 \end{bmatrix}$$

tratamento análogo pode ser feito na variável y utilizando a Equação 14 para a obtenção de f_y .

Divergente

Analiticamente o divergente de um campo vetorial $\mathbf{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (v_1, v_2) = (v_1)_x + (v_2)_y$. Para o cálculo do divergente de um campo vetorial usamos o gradiente em suas componentes, da seguinte forma: calculamos $\nabla v_1 = ((v_1)_x, (v_1)_y)$ e $\nabla v_2 = ((v_2)_x, (v_2)_y)$, descartamos $(v_1)_y$ e $(v_2)_x$ e somamos as componentes restantes para obter o divergente do campo.

Realizamos testes de convergência tanto para o Gradiente quanto para o Divergente apresentados no Apêndice A. Desta maneira verificamos a eficiência e confiabilidade dos operadores discretos bem como sua ordem de convergência.

Métodos de Diferenças Finitas

Os métodos das diferenças finitas consistem em substituir as derivadas parciais presentes na equação diferencial por aproximações por diferenças finitas, para isso é necessário uma malha no domínio. A discretização de problemas elípticos sempre resulta num sistema de equações lineares que têm uma estrutura peculiar, em geral a matriz do sistema é esparsa. Ilustraremos como é a discretização utilizando a equação de Poisson

$$-\Delta u = f$$

definida em $R = [a, b] \times [c, d]$ com condição de Dirichlet

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial R.$$

Fixado m, n as partições de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente, denotamos a malha em R por

$$M = \left\{ (x_i, y_j); \quad \begin{array}{ll} x_i = a + ih & y_j = c + jk, \\ i \in \{0, 1, \dots, m\} & j \in \{0, 1, \dots, n\} \end{array} \right\},$$

lembrando que $h = \frac{b-a}{m}$ e $k = \frac{d-c}{n}$. Aplicando um ponto do interior de M na equação, isto é, um ponto (x_i, y_j) com $i \notin \{0, m\}$ e também $j \notin \{0, n\}$, obtemos

$$-u_{xx}(x_i, y_j) - u_{yy}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j). \quad (15)$$

Note que pela Equação 12 e seu análogo, as derivadas podem ser aproximadas por

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \quad (16)$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2}. \quad (17)$$

Aplicando as Equações 16 e 17 na Equação 15 temos

$$\begin{aligned} f(x_i, y_j) \approx & - \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\ & - \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2} \end{aligned}$$

Quando trocamos na expressão acima o sinal de \approx por $=$ chamamos de *equação de diferenças*. Usando a notação $U_{i,j}$ para a solução da equação de diferenças temos

$$- \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = f_{i,j} \quad (18)$$

Note que a Equação 18 não pode ser aplicada para os pontos de fronteira de M , contudo $U_{i,j}$ sobre a fronteira são conhecidos, a saber, $U_{i,j} = g(x_i, y_j)$. [Cuminato and Meneguette, 2013] mostra que $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ e que converge quando a malha é refinada.

O método usado acima (fórmula centrada nas variáveis x e y) é chamado de estrela de 5 pontos. Pois sua máscara, isto é, a representação gráfica dos pontos utilizados da malha, formam uma estrela com 5 pontos (Fig. 1), podendo ser representada também pela matriz

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}.$$

Para o caso

$$-\Delta u = f$$

definida em $R = [a, b] \times [c, d]$ com condições

$$u(x, y) = g_1(x, y) \quad \text{nas bordas Sul, Leste e Norte}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = g_2(x, y) \quad \text{na borda Oeste}$$

temos um problema. Não podemos usar a Equação 18 para os pontos sobre a fronteira oeste, pois diferente do caso com condição de Dirichlet onde o valor de u é conhecido

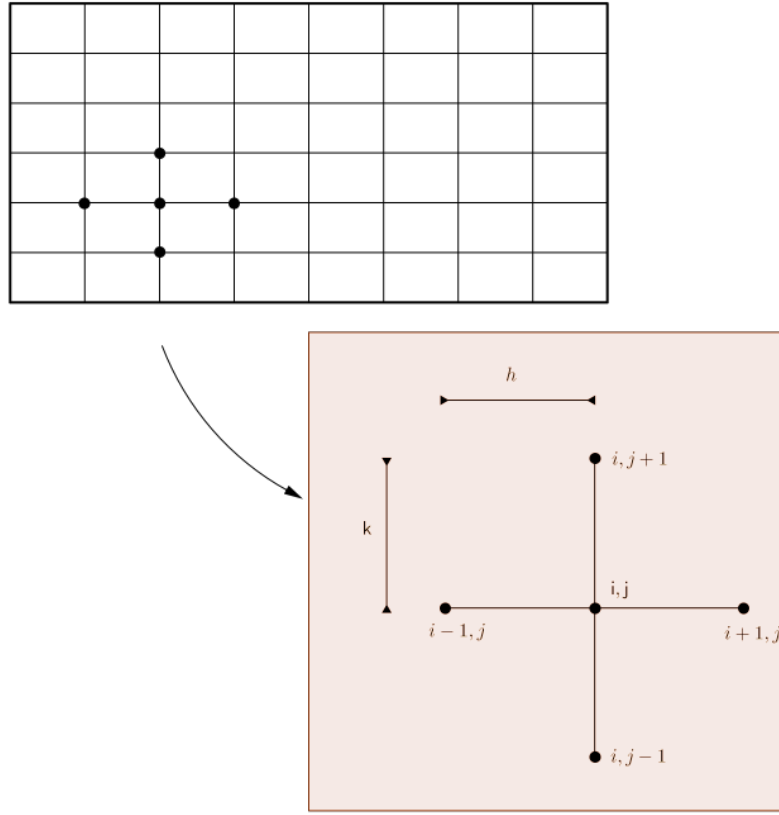


Figura 1 – Máscara da estrela de 5 pontos.

na fronteira, nesse caso em questão devemos determinar u também sobre os pontos da fronteira oeste. Podemos usar um método alternativo, que usa a fórmula centrada na variável y e a fórmula progressiva ao longo da fronteira oeste, contudo como haveriam pontos de ordem $\mathbf{O}(h)$, o método como um todo seria da ordem $\mathbf{O}(h)$.

Para utilizar o método da estrela de 5 pontos, devemos introduzir pontos fantasmas que estão fora do domínio, como o ponto $(-1, j)$ na Figura 2 e utilizaremos as condições de fronteira para eliminá-los.

Usando a fórmula centrada no ponto (x_0, y_j) em $-u_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu} = g_2(x, y)$ temos

$$u_x(x_0, y_j) = \frac{U_{1,j} - U_{-1,j}}{2h} \Rightarrow U_{-1,j} = U_{1,j} + 2hg_2(x_0, y_j)$$

substituindo na Equação 18 para $i = 0$, temos

$$-\frac{2U_{1,j} - 2U_{0,j} + 2hg_2(x_0, y_j)}{h^2} - \frac{U_{0,j+1} - 2U_{0,j} + U_{0,j-1}}{k^2} = f_{0,j}, \quad (19)$$

obtemos assim a ordem $\mathbf{O}(h^2)$.

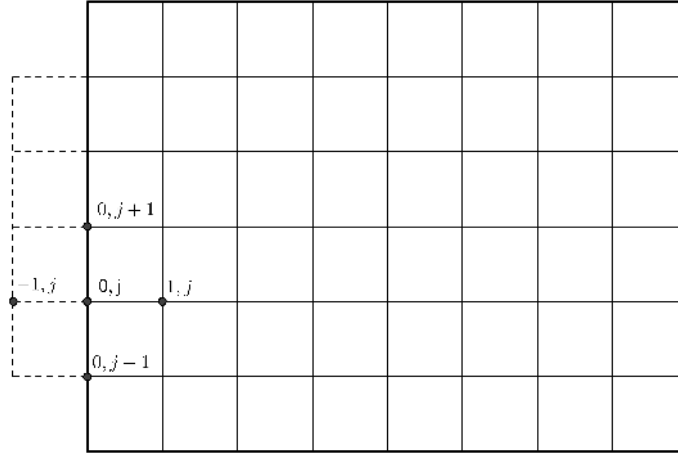


Figura 2 – O ponto $(-1, j)$ é um ponto fantasma e deve ser eliminado das equações, em razão de tal ponto não pertencer ao domínio da função.

Exemplo 2.6. Considere o problema de contorno

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y) && \text{definida em } R = [-1, 1] \times [-1, 1] \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} &= g(x, y) && \text{nas bordas Leste e Oeste} \\ u(x, y) &= t(x, y) && \text{nas bordas Sul e Norte} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -4 \\ g(x, y) &= 2 \\ t(x, y) &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

cujas solução analítica é $u(x, y) = x^2 + y^2$.

Para discretizar o problema precisamos de uma malha. Tomando $h = k = 1$, temos a malha

$$M = \{(-1 + ih, -1 + jk); i, j \in \{0, 1, 2\}\}.$$

Portanto o ponto $U_{1,1}$ é interior e os pontos $U_{0,1}$ e $U_{2,1}$ são de fronteira, os demais são pontos conhecidos pela condição de Dirichlet. Portanto, usando as Equações 18 e 19 temos

$$\begin{aligned} -2U_{1,1} + 4U_{0,1} - 2hg_{0,1} - U_{0,2} - U_{0,0} &= h^2 f_{0,1} \\ 4U_{1,1} - U_{2,1} - U_{0,1} - U_{1,2} - U_{1,0} &= h^2 f_{1,1} \\ -2U_{1,1} + 4U_{2,1} - 2hg_{2,1} - U_{2,2} - U_{2,0} &= h^2 f_{2,1} \end{aligned}$$

lembrando que $U_{0,0}, U_{1,0}, U_{2,0}, U_{0,2}, U_{1,2}, U_{2,2}$ satisfazem $U_{i,j} = t_{i,j} = t(-1 + ih, -1 + jk)$. Reescrevendo em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,1} \\ U_{1,1} \\ U_{2,1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{0,1} \\ f_{1,1} \\ f_{2,1} \end{bmatrix} + 2h \begin{bmatrix} g_{0,1} \\ 0 \\ g_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{0,0} + t_{0,2} \\ t_{1,0} + t_{1,2} \\ t_{2,0} + t_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

note que a solução desse sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{é} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top,$$

ao qual corresponde a solução para as equações de diferenças que por sua vez juntamente com as condições de Dirichlet correspondem a solução do exemplo proposto. Neste caso em particular não houve erros de precisão, obtendo portanto a exata solução nos pontos desejados. Exibimos na Figura 3 o caso em que $h = k = 0.0025$ e relatamos que o maior erro encontrado foi da ordem de 2.4×10^{-3} por esse motivo exibimos apenas a solução discreta. \blacklozenge

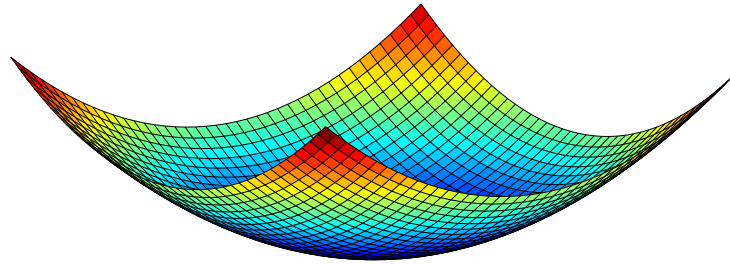


Figura 3 – Solução discreta da equação de Poisson com condições de fronteiras referente ao Exemplo 2.6.

2.4 Funções de Green

As funções de Green são conceitos clássicos na área de Equações Diferenciais. Elas foram muito estudadas desde sua “aparição” em 1828, quando Goerge Green publicou um trabalho de física matemática, que nas notações atuais diz: examinar as soluções de $-\Delta u = f$ dentro de um volume V satisfazendo certas condições ao longo da fronteira de V . Para isso Green estudou outra equação de Poisson, as quais suas soluções são chamadas de Funções de Green, recomendamos [Evans, 2010].

Analisando a Equação de Laplace $\Delta u = 0$, observamos que suas soluções u são invariantes por movimentos rígidos. De fato, para o caso bi-dimensional dada uma translação $T(x, y) = (x + a, y + b) =: (\tilde{x}, \tilde{y})$ pela regra da cadeia temos

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} = u_{\tilde{x}}$$

e daí

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_{\tilde{x}}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(u_{\tilde{x}}) = u_{\tilde{x}\tilde{x}}$$

e portanto $u_{xx} + u_{yy} = u_{\tilde{x}\tilde{x}} + u_{\tilde{y}\tilde{y}}$. Para a rotação considere a transformação rotação por um ângulo θ

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

daí

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_{\tilde{x}} \cos \theta + u_{\tilde{y}} \sin \theta \\ u_{xx} &= u_{\tilde{x}\tilde{x}} \cos^2 \theta - 2u_{\tilde{x}\tilde{y}} \cos \theta \sin \theta + u_{\tilde{y}\tilde{y}} \sin^2 \theta \\ u_{yy} &= u_{\tilde{x}\tilde{x}} \sin^2 \theta + 2u_{\tilde{x}\tilde{y}} \cos \theta \sin \theta + u_{\tilde{y}\tilde{y}} \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = u_{\tilde{x}\tilde{x}} + u_{\tilde{y}\tilde{y}}.$$

Diante disso as soluções da equação da Laplace têm a forma radial $u(\mathbf{x}) = v(r)$, onde $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e v uma função a ser escolhida. Note que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad x \neq 0,$$

logo para $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(r) \frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i} &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \frac{1}{r} - v'(r) \frac{x_i^2}{r^3} \end{aligned}$$

daí

$$\Delta u = v''(r) + v' \frac{n}{r} - v' \frac{1}{r}$$

portanto temos $\Delta u = 0$, se e somente se,

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0.$$

Observe que se $v' \neq 0$,

$$\log(v')' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r} \implies v'(r) = \frac{1}{r^{n-1}}.$$

Portanto se $r > 0$, v pode ser escolhido como

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c, & n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3 \end{cases}$$

onde $b, c \in \mathbb{R}$.

Definição 2.7. A função

$$G_\infty := G_\infty(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}\|, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (20)$$

definida para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com $\mathbf{x} \neq 0$, é chamada de *função de Green para espaços infinitos*, ou também *solução fundamental da equação de Laplace*. Chamaremos apenas de *função de Green* para não carregar a leitura. Observamos que $G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = G_\infty(\mathbf{y} - \mathbf{x})$.

O teorema seguinte estabelece uma fórmula fechada para as soluções das equações de Poisson via funções de Green, mas antes, dada uma função contínua $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sendo Ω aberto, definimos o *suporte de f* como sendo

$$\text{sup}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}},$$

onde o fecho é tomado em Ω . Se $\text{sup}(f)$ é limitado, dizemos que f tem *suporte compacto*.

Teorema 2.8 (Solução da equação de Poisson). Se f é uma função de classe C^2 com suporte compacto então a função

$$u(\mathbf{x}) = (f * G_\infty)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (21)$$

satisfaz

1. $u \in C^2$
2. $-\Delta u = f$ em \mathbb{R}^n

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso $n = 2$, para $n \geq 3$ é análogo.

1: Temos que

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

consequentemente

$$\frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x})}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{y}) \left[\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{h} \right] d\mathbf{y}$$

onde $h \neq 0$ e \mathbf{e}_i é o i -ésimo vetor canônico. Assim temos

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{y}) \left[\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{h} \right] d\mathbf{y} - \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{y}) \frac{\partial f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial x_i} d\mathbf{y} \right\| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|G_\infty(\mathbf{y})\| \left\| \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{h} - \frac{\partial f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial x_i} \right\| d\mathbf{y} =: (\star) \end{aligned}$$

e pela Equação 2.1 com $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{u} = h\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{h}_i, 0, \dots, 0)$ temos,

$$(\star) = \int_{\mathbb{R}^n} \|G_\infty(\mathbf{y})\| \left\| h \frac{\partial^2 f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial x_i^2} + \frac{r(h\mathbf{e}_i)}{h^2} \right\| d\mathbf{y}$$

Como f tem suporte compacto, existe $K \subset B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ compacto

$$\begin{aligned} (\star) &\leq |h|C_1 \int_K \|G_\infty(\mathbf{y})\| d\mathbf{y} \leq |h|C_1 \int_{B(0,R)} \|G_\infty(\mathbf{y})\| d\mathbf{y} = \\ &\frac{|h|C_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \|\log r\| r dr d\theta = \frac{|h|C_1}{2\pi} \left(\frac{R^2}{2} - 1 \right) = |h|C \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Obtemos então

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (23)$$

Como a expressão do lado direito da equação acima é contínua em \mathbf{x} , temos que u é de classe C^2 .

2: Da Equação 23 temos

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

e podemos dividi-la em duas, dividindo o domínio de integração em duas regiões. Usaremos uma bola de raio ε que contém a singularidade da G_∞ e o seu complementar, $B = B(0, \varepsilon)$ e $B^c = \mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)$ respectivamente

$$\Delta u(\mathbf{x}) = A_\varepsilon + B_\varepsilon := \int_B G_\infty(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{B^c} G_\infty(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (24)$$

operando A_ε de maneira semelhante a Equação 22 temos

$$\|A_\varepsilon\| \leq C \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_B \|G_\infty(\mathbf{y})\| d\mathbf{y} \leq C\varepsilon^2 |\log \varepsilon| \quad (25)$$

$$\|A_\varepsilon\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

e pela fórmula de integração por partes (Teo. 2.4)

$$B_\varepsilon := C_\varepsilon + D_\varepsilon = - \int_{B^c} DG_\infty(\mathbf{y}) \cdot D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial B} G_\infty(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial \nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

Onde ν é o vetor unitário apontando para fora de $\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)$, ou seja, para dentro de $B(0, \varepsilon)$, sobre ∂B . Note que

$$\|D_\varepsilon\| \leq C \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B} \|G_\infty(\mathbf{y})\| dS(\mathbf{y}) \leq C\varepsilon |\log \varepsilon|$$

$$\|D_\varepsilon\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Novamente por integração por partes, agora no termo C_ε temos

$$\begin{aligned} C_\varepsilon &= \int_{B^c} \Delta G_\infty(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial B} \frac{\partial G_\infty}{\partial \nu}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &= - \int_{\partial B} \frac{\partial G_\infty}{\partial \nu}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

pois $\Delta G_\infty = 0$.

Note que para $DG_\infty(\mathbf{y}) = -\frac{\mathbf{y}}{2\pi\|\mathbf{y}\|^2}$, ($\mathbf{y} \neq 0$) e $\nu = -\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$. Daí em $\partial B(0, \varepsilon)$ temos

$$\frac{\partial G_\infty}{\partial \nu}(\mathbf{y}) = DG_\infty(\mathbf{y}) \cdot \nu = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

Uma vez que $2\pi\varepsilon =$ comprimento da circunferência $B(0, \varepsilon)$, temos então o valor médio da f sobre a fronteira da bola, isto é,

$$C_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = - \oint_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} f(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

$$C_\varepsilon \rightarrow -f(\mathbf{x}) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Logo temos

$$\Delta u(\mathbf{x}) = A_\varepsilon + B_\varepsilon = A_\varepsilon + C_\varepsilon + D_\varepsilon \longrightarrow -f(\mathbf{x}) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

portanto $-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. ■

O teorema continua válido retirando a hipótese de suporte compacto, contudo devemos definir as funções de Green por meio da “função” δ de Dirac². Note que G_∞ satisfaz

$$\Delta G_\infty(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$$

de fato, $(\log \|\mathbf{x}\|)_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{\|\mathbf{x}\|^4}$ e $(\log \|\mathbf{x}\|)_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\|\mathbf{x}\|^4}$. Se quisermos encontrar uma solução para a equação de Poisson

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

observamos que

$$f(\mathbf{x}) = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int \Delta_{\mathbf{x}} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

pelo fato de que Δ é um operador diferencial linear e pelo teorema da Convergência Dominada temos

$$\Delta \int G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

² Mais detalhes sobre a delta podem ser encontrados em [Operadores SPH sobre Variedade](#).

portanto

$$u(\mathbf{x}) = \int G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

é uma solução para a equação de Poisson. Note que no fim, as definições de solução de Equações de Poisson via funções de Green coincidem.

Vale ressaltar, por curiosidade, que existem também funções de Green para Equações Diferenciais Ordinárias, vide [[Stone and Goldbart, 2009](#)].

A Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge

A Decomposição de Helmholtz-Hodge é uma ferramenta valiosa para a análise de campos vetoriais, uma vez que ela decompõe um campo vetorial em outras três componentes vetoriais, sendo uma irrotacional (rotacional nulo), uma solenoidal (divergente nulo) e uma harmônica (laplaciano nulo), permitindo assim uma análise individual de cada componente. Por exemplo, a componente irrotacional possui fontes e sorvedouros mas não vórtices.

Veremos na Seção 3.1 que em domínios limitados o HHD não é única e para obter a unicidade impomos condições de fronteira. Contudo a adição de tais condições podem acarretar em uma decomposição diferente da esperada, como por exemplo, a adição de *vórtices* Seção 3.2.

Para obter uma decomposição única e sem possíveis problemas, [Bhatia et al., 2014] propõe uma nova estratégia (Seção 3.3). Usando conceitos da teoria de potenciais, o campo vetorial é considerado como a soma de campos criados devido a influências internas e externas do ponto de vista de um dado domínio. Esse contexto é equivalente a imposição de condições de fronteiras.

Por fim, mostraremos que pode ser feita uma decomposição/aproximação local do campo vetorial de maneira a otimizar o tempo de computação, também proposto por Bhatia.

Devido as propriedades que os campos vetoriais adquirem com a hipótese de estarem sobre um domínio simplesmente conexo (que vimos na Seção 2.2), usaremos apenas domínios simplesmente conexos, quando não o for será explicitado no texto.

3.1 A Decomposição de Helmholtz-Hodge

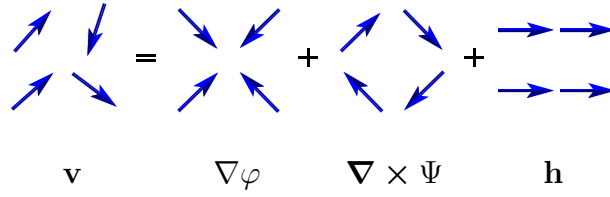


Figura 4 – Ilustração da Decomposição de Helmholtz-Hodge de um campo vetorial 2D discreto.

Dado um campo vetorial \mathbf{v} podemos escreve-lo como $\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}$, isso é possível graças a um teorema denominado como um dos teoremas fundamentais da dinâmica dos fluidos, chamado de Decomposição de Helmholtz-Hodge (Figura 4). Seja Ω um aberto e simplesmente conexo do \mathbb{R}^n . A Decomposição de Helmholtz-Hodge decompõem um campo $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (para $n = 2, 3$), em três campos vetoriais, sendo um irrotacional, um solenoidal e um harmônico, simplificando sua análise, uma vez que propriedades importantes podem ser estudadas diretamente nas componentes. De acordo com a Seção 2.2, podemos representar a decomposição por

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi + \mathbf{h} \quad (26)$$

onde φ é um potencial escalar, Ψ é um potencial vetorial e \mathbf{h} é campo vetorial harmônico.

Vimos também na Seção 2.2 que os operadores diferenciais têm as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla\varphi &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \Psi &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0 \\ \Delta \mathbf{h} &= 0 \end{aligned}$$

Dessas igualdades temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot (\nabla\varphi) + \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) + \nabla \cdot \mathbf{h} \\ &= \nabla \cdot (\nabla\varphi) + 0 + 0 \\ &= \Delta\varphi \\ \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times (\nabla\varphi) + \nabla \times (\nabla \times \Psi) + \nabla \times \mathbf{h} \\ &= 0 + \nabla \times (\nabla \times \Psi) + 0 \\ &= \nabla \times (\nabla \times \Psi) \end{aligned}$$

E obtemos o sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta\varphi \\ \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \Psi) \end{cases} \quad (27)$$

O campo vetorial $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ é chamado de componente com rotação nula ou irrotacional de \mathbf{v} , e o campo vetorial $\mathbf{r} = \nabla \times \Psi$ é chamado de componente com divergência nula ou solenoidal de \mathbf{v} .

A decomposição para campos bidimensionais, requer uma notação diferente a qual é introduzida por [Polthier and Preuß, 2003], definida como

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + J(\nabla\psi) + \mathbf{h}, \quad (28)$$

onde J é uma função definida como a rotação de 90° no sentido horário

$$J(v_1, v_2) = (v_2, -v_1).$$

Nesse contexto, ambos os potenciais, φ e ψ , são potenciais escalares.

Definimos o rotacional bidimensional como a função de valor real

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (v_1, v_2) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (29)$$

onde $v_i = v_i(x, y)$. Observa-se que pela definição da função J o rotacional 2D

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times (v_1, v_2) \\ &= \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ &= \nabla \cdot (v_2, -v_1) \\ &= \nabla \cdot J((v_1, v_2)) \\ &= \nabla \cdot J(\mathbf{v}) = (\nabla \cdot J)(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Com as definições e notações adotadas para o caso bidimensional, as componentes da decomposição bidimensional ainda possuem as propriedades:

$\mathbf{d} = \nabla\varphi$ é um campo irrotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla\varphi) &= \nabla \cdot J(\nabla\varphi) \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$ é um campo solenoidal

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (J(\nabla\psi)) &= \nabla \cdot \left(J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right) \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto a mesma nomenclatura da decomposição 3D pode ser utilizada na decomposição 2D com as devidas alterações e suas propriedades continuam válidas, isto é, o campo vetorial $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ é chamado de componente com rotação nula ou irrotacional de \mathbf{v} , e o campo vetorial $\mathbf{r} = \nabla \times \psi = J(\nabla\psi)$ é chamado de componente com divergência nula ou solenoidal de \mathbf{v} . Das igualdades acima temos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot (\nabla\varphi) + \nabla \cdot (J(\nabla\psi)) + \nabla \cdot \mathbf{h} \\ &= \nabla \cdot (\nabla\varphi) + 0 + 0 \\ &= \Delta\varphi \\ (\nabla \cdot J)\mathbf{v} &= (\nabla \cdot J)(\nabla\varphi) + (\nabla \cdot J)(J(\nabla\psi)) + (\nabla \cdot J)\mathbf{h} \\ &= 0 + \nabla \cdot (J(J(\nabla\psi))) + 0 \\ &= 0 + \nabla \cdot (-\nabla\psi) + 0 \\ &= -\Delta\psi\end{aligned}$$

e obtemos a versão bidimensional do sistema de equações de Poisson (27)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \Delta\varphi \\ \nabla \cdot (J\mathbf{v}) &= -\Delta\psi \end{cases} \quad (30)$$

onde os potenciais φ e ψ de (28) são as soluções do sistema. A componente harmônica é calculada pela diferença $\mathbf{h} = \mathbf{v} - \mathbf{d} - \mathbf{r}$.

Note que para o sistema (26)-(27) quanto (28)-(30) e para quaisquer harmônicos \mathbf{h}_d e \mathbf{h}_r , os campos $\mathbf{d}' = \mathbf{d} + \mathbf{h}_d$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{h}_r$ e $\mathbf{h}' = \mathbf{h} - \mathbf{h}_d - \mathbf{h}_r$ também representam uma decomposição válida para o sistema. Para $\Omega = \mathbb{R}^n$ e \mathbf{v} anulando-se no infinito o campo harmônico não existe ($\mathbf{h} = \mathbf{h}' = \mathbf{h}_d = \mathbf{h}_r = 0$), assim a decomposição é única, vide [Arfken and Weber, 2005]. Para domínios limitados o harmônico pode existir e para garantir a unicidade da decomposição é usualmente especificado condições de fronteira para cada equação de Poisson no sistema (30).

Faremos menção a duas condições de fronteira, adotando a notação ν para o vetor normal apontando para fora do domínio, temos a primeira condição *Normal-Paralelo*

(NP)

$$\begin{cases} \nabla\varphi \times \nu &= 0 \\ J(\nabla\psi) \cdot \nu &= 0 \end{cases}$$

impondo que a componente irrotacional seja normal à fronteira e a componente solenoidal seja paralela à fronteira. A segunda condição é a *Paralelo-Normal* (PN)

$$\begin{cases} \nabla\varphi \cdot \nu &= 0 \\ \nabla\psi \cdot \nu &= 0 \end{cases}$$

impondo que a componente irrotacional seja paralela à fronteira e a componente solenoidal seja normal à fronteira. Tal condição porém, necessita de um certo cuidado. Segundo [Bhatia et al., 2013a], para que a condição PN torne o problema bem posto são necessárias as verificações das integrais

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (31)$$

Note que pelo fato de

$$\begin{aligned} \nabla\varphi \cdot \nu &= \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \\ \nabla\psi \cdot \nu &= \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 \end{aligned}$$

a verificação das Equações 31 são exatamente as mesmas verificações exigidas para que uma equação de Poisson com condições de fronteira puramente Neumann iguais a zero (Equações 8 e 30).

Exibimos na Figura 5 um exemplo do comportamento que as componentes obedecem mediante a imposição das condições de fronteira mencionadas, fica claro em ambos os casos a ortogonalidade entre a componente irrotacional e solenoidal na fronteira.

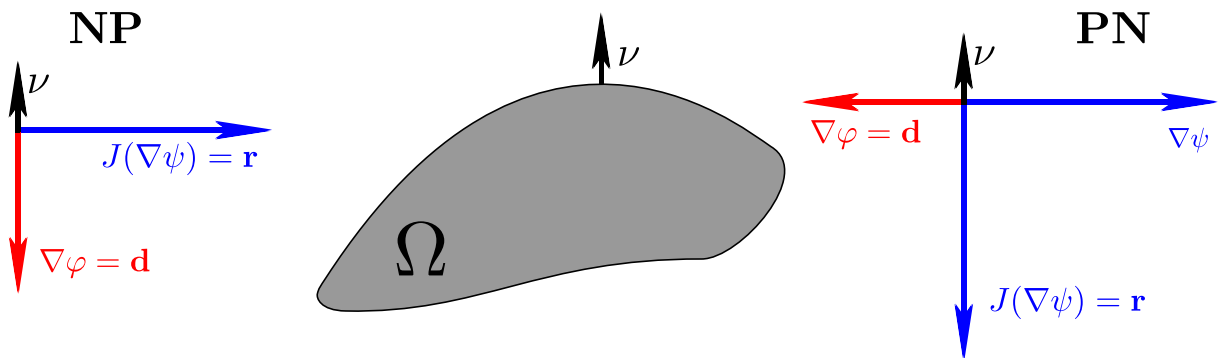


Figura 5 – Exemplo para ilustrar a ortogonalidade entre as componentes quando imposta a condição Normal-Paralelo (NP) e a condição Paralelo-Normal (PN).

A *ortogonalidade* L^2 em Ω entre dois campos de vetores \mathbf{u} e \mathbf{w} é estabelecida pela igualdade

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} dA = 0. \quad (32)$$

Considere o problema da HHD com condições **NP**. Vamos verificar a ortogonalidade entre as componentes irrotacional e solenoidal.

$$I = \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \, dA = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{r} \, dA$$

pela identidade $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{r}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{r} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{r})$ e pelo fato de $\nabla \cdot \mathbf{r} = 0$ temos

$$I = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{r}) \, dA$$

do Teorema do Divergente (2.3) e da segunda equação da condição **NP**

$$I = \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \, dA = \int_{\partial\Omega} \varphi (\mathbf{r} \cdot \nu) \, dA = 0. \quad (33)$$

Portanto sobre as condições **NP** as componentes irrotacional e solenoidal são ortogonais. Contudo para as condições **PN**, não podemos usar o mesmo argumento. De fato, analisando a segunda integral em 33 temos $\mathbf{r} \cdot \nu = J(\nabla \psi) \cdot \nu$, ao passo que a condição imposta é $\nabla \psi \cdot \nu = 0$.

3.2 Entendendo o campo Harmônico

A razão fundamental para que o HHD não seja único é o campo harmônico, que é tanto irrotacional quanto solenoidal. Logo, para quaisquer harmônicos \mathbf{h}_d e \mathbf{h}_r , os campos $\mathbf{d}' = \mathbf{d} + \mathbf{h}_d$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{h}_r$ e $\mathbf{h}' = \mathbf{h} - \mathbf{h}_d - \mathbf{h}_r$ também representam uma decomposição válida para um mesmo problema. Portanto, para entender a não unicidade, é preciso entender a natureza do harmônico, como ele se relaciona com as condições de fronteiras e o porquê impor condições de fronteira não é uma boa escolha.

A imposição de condição de fronteira pode retornar componentes que não sejam compatíveis com o campo dado. Durante experimentos [Wiebel et al., 2004] atestou que a decomposição de Helmholtz-Hodge 2D com imposição de condição de fronteira **NP** tem problemas quando os potenciais contêm feições características próxima ou sobre a fronteira.

Exibimos na Figura 6 o exemplo usado por Wiebel para demonstrar tais problemas. Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ com a particularidade que \mathbf{r} contém apenas um vórtice de centro exatamente na fronteira e o seu potencial tem decaimento homogêneo em todas as direções (gaussiana). A expectativa é que a decomposição de Helmholtz-Hodge do campo retorne apenas a componente solenoidal, $\tilde{\mathbf{r}}$, e as outras sejam nulas. Contudo, como ilustra os itens (c) e (d) da Figura 6, o potencial obtido pela decomposição tem uma diferença significativa comparado ao potencial analítico. Além da redução da magnitude, a decomposição adiciona ao potencial um mínimo que acarreta em um vórtice no sentido contrário ao analítico.

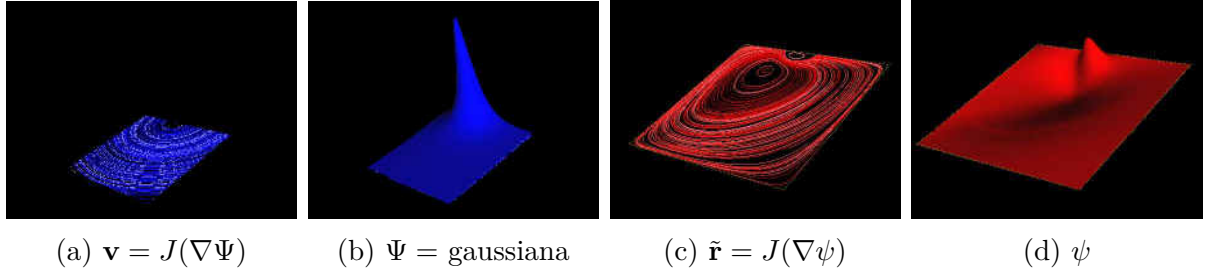


Figura 6 – Exemplo dado por [Wiebel et al., 2004] expondo um problema gerado pela decomposição 2D. Onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ é o campo analítico e $\tilde{\mathbf{r}}$ é a componente advinda da decomposição.

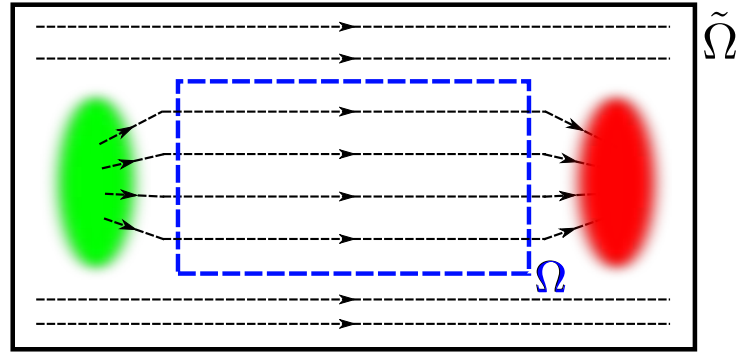


Figura 7 – Exposição da dependência de um campo harmônico com relação ao domínio.

Wiebel ainda realizou teste com vórtices fora do domínio e concluiu que a decomposição inverte o sentido de rotação do vórtice em todo o domínio, além de reduzir a velocidade de circulação comparada ao campo analítico. E por fim constatou que o vórtice que tinha seu centro fora do domínio foi levado para dentro do domínio pela decomposição. Também constatamos um problema semelhante ao primeiro aqui exibido usando as condições **PN**, porém de menor intensidade.

Além desses problemas, há questionamentos também sobre a componente harmônica. De fato, observando o campo na Figura 7, se analisarmos o campo sobre o domínio Ω temos que é um campo harmônico portanto seria esperado que a decomposição retornasse apenas a componente harmônica. Porém considerando o domínio $\tilde{\Omega}$, temos que uma parte do campo é criado e destruído por divergências locais e portanto não é harmônico. Portanto, a componente irrotacional da decomposição em $\tilde{\Omega}$ deve ser não nula em Ω .

É sabido que em equações de Poisson $\Delta u = f$, o harmônico está associado a condições de fronteira, pois exigimos tais condições na tentativa de obter a unicidade (se u é solução, $u + H$ com $\Delta H = 0$, também é solução). Como os problemas de Poisson são abordados diante de um domínio aberto, temos que a fronteira é externa ao domínio, logo determinar um campo harmônico é equivalente a conhecer informações fora do domínio. Observando pela Figura 7, a identificação de campos harmônicos por imposição de condições de fronteira em Ω é equivalente ao fato de conhecer o campo em $\tilde{\Omega}$ ou sua influência em $\tilde{\Omega}$. Através disso, [Bhatia et al., 2014] argumenta que qualquer campo não-harmônico

pode ser completamente compreendido por informações disponíveis dentro do domínio. *Portanto, um campo harmônico é indiretamente identificado como o campo que não pode ser compreendido por informações de dentro do domínio.* Essa interpretação é sobre os dados e não faz suposições sobre informações externas desconhecidas.

Verificando em um exemplo na Física, pela Lei de Gauss ¹ dado uma carga elétrica pontual q não envolvida por $S = B(a, r)$ temos

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (34)$$

Recordando o Teorema do Divergente (2.3)

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV \quad (35)$$

nesse caso o campo elétrico é irrotacional, logo $\mathbf{E} = \nabla\psi$, para algum potencial ψ , daí por (34) e (35) temos

$$\int_S \nabla \cdot \nabla\psi \, dV = 0.$$

Logo para regiões sem carga, as soluções para a equação de Laplace $\Delta\psi = 0$ (uma função harmônica) representam uma *influência externa*, isto é, o potencial gerado pela carga que encontra-se fora do domínio.

Essa interpretação indireta de campo harmônico tem vantagens importantes, pois considerando a interpretação acima podemos implicitamente identificar qualquer campo harmônico com respeito a um domínio.

3.3 A Decomposição Natural

Vimos na secção anterior que a imposição de condições de fronteira pode gerar um problema na decomposição, logo seria importante encontrar uma maneira de realizar a decomposição sem tais problemas. Para resolver isso apresentamos a Decomposição Natural a qual realiza a decomposição sem imposição de condições de fronteira usando a Decomposição de Helmholtz, veremos que além disso obtemos a unicidade e componentes puramente irrotacional e solenoidal.

Teorema 3.1 (Decomposição de Helmholtz). Seja \mathbf{v} um campo vetorial diferenciável. Se $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ tem decaimento para zero mais rápido que $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, então \mathbf{v} pode ser escrito de maneira única como a soma de um campo irrotacional com um campo solenoidal, ou seja,

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi.$$

¹ Mais sobre o tema pode ser visto em [Moysés, 2006].

Definição 3.2 (A Decomposição Natural). A Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge de um campo vetorial \mathbf{v} suave, $\mathbf{HHD}^* : \mathbf{v} = \mathbf{d}^* + \mathbf{r}^* + \mathbf{h}^*$, é obtida separando os campos por influência interna e externa referentes a um domínio. As componentes *divergente natural* (\mathbf{d}^*) e *rotacional natural* (\mathbf{r}^*) representam campos influenciados por divergências e rotações de \mathbf{v} dentro do domínio. Consequentemente a componente *harmônico natural* (\mathbf{h}^*) é o campo influenciado apenas pelo exterior (fronteira) do domínio.

Teorema 3.3. Dado um campo vetorial \mathbf{v} suave sobre um domínio limitado Ω simplesmente conexo, a Decomposição Natural definida em (3.2) existe e é única.

Demonstração. Dado um campo vetorial suave $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $n = 2, 3$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, o objetivo é interpretar e calcular as componentes naturais do campo \mathbf{v} . Usando \mathbf{v} nós definimos outro campo suave, $\mathbf{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que sua restrição em Ω seja igual a \mathbf{v} e seu decaimento no infinito seja maior que $1/\|\mathbf{x}\|$. Por definição, o campo \mathbf{V} obtém as propriedades de \mathbf{v} em Ω , isto é, $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ e $\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{v}$ em Ω .

Para encontrar as componentes de \mathbf{v} , vamos estudar o campo \mathbf{V} . Essa abordagem têm duas vantagens principais

1. O HHD de \mathbf{V} é único,
2. Podemos usar a função G_∞ .

Logo a HHD de \mathbf{V} é dado pelo Teorema de Helmholtz (Teo. 3.1)

$$\mathbf{V} = \nabla D + \nabla \times R,$$

onde os potenciais D e R são dados pela solução das equações de Poisson em \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \Delta D &= \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \Delta R &= -\nabla \times \mathbf{V} \end{aligned}$$

Usando G_∞ para resolver as equações de Poisson (Teo. 2.8), assim os potenciais para $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ são dados por

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ R(\mathbf{x}_0) &= - \int_{\mathbb{R}^n} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{36}$$

Podemos dividi-las em parte interior e exterior com relação à $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mais ainda, usando as propriedades herdadas de \mathbf{V} por \mathbf{v} temos

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Omega} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ R(\mathbf{x}_0) &= - \int_{\Omega} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

onde as integrais $\int_{\Omega}(\dots)$ e $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}(\dots)$ representam a influência interna e externa com respeito à Ω respectivamente.

Note que D e R estão definidos sobre o \mathbb{R}^n , contudo, como o objetivo é calcular a Decomposição Natural sobre Ω , vamos nos restringir a $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. E pela definição, os potenciais naturais representam apenas a influência interna, portanto os potenciais naturais são

$$\begin{aligned} D^*(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} & \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega \\ R^*(\mathbf{x}_0) &= - \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} & \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega \end{aligned} \quad (37)$$

Na Seção 3.2, observamos que a integral $\int_{\Omega}(\dots)$ define um potencial não harmônico dentro de Ω e por outro lado, a integral $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}(\dots)$ define um potencial harmônico dentro de Ω . Portanto, ignorando essa última integral, não teremos mudanças nas rotações e divergências capturadas pelos potenciais não harmônicos. Como resultado, as componentes $\mathbf{d}^* = \nabla D^*$ e $\mathbf{r}^* = \nabla \times R^*$ ($\mathbf{r}^* = J(\nabla R^*)$, se $n = 2$) combinam a divergência e a rotação de \mathbf{v} . Portanto o natural harmônico pode ser calculado como o resto $\mathbf{h}^* = \mathbf{v} - \mathbf{d}^* - \mathbf{r}^*$, o qual é a soma das duas integrais ignoradas pelas outras componentes. Note que os potenciais naturais são unicamente determinados pelas Equações 36 e 37, portanto \mathbf{d}^* , \mathbf{r}^* e \mathbf{h}^* também os são. Assim a Decomposição Natural é única. ■

Embora as componentes naturais sejam calculadas sobre um domínio limitado, não é imposto condições de fronteira, dessa maneira não são atribuídos potenciais erros nas componentes.

Decomposição Local

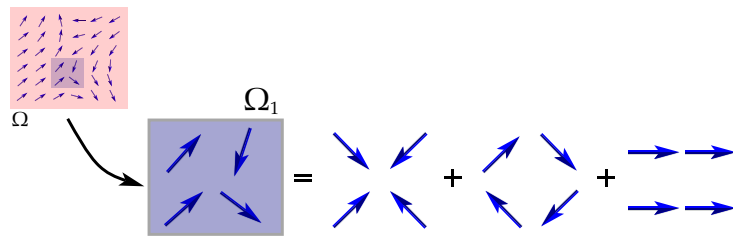


Figura 8 – Representação da decomposição local.

Vimos que a divisão de um campo por influências proporciona uma decomposição com ausência de condições de fronteira. Diante disso, dado um campo vetorial em um domínio Ω , podemos por exemplo, estudar o campo restrito em um subdomínio $\Omega_1 \subset \Omega$ e realizar a decomposição natural (Figura 8), uma vez que os valores na fronteira de Ω_1 são obtidos “naturalmente”. Em outras palavras, dado um campo vetorial sobre um domínio podemos estudar o campo sobre um subdomínio. Chamamos esse estudo de *decomposição local* do campo em Ω_1 .

Aproximação Local

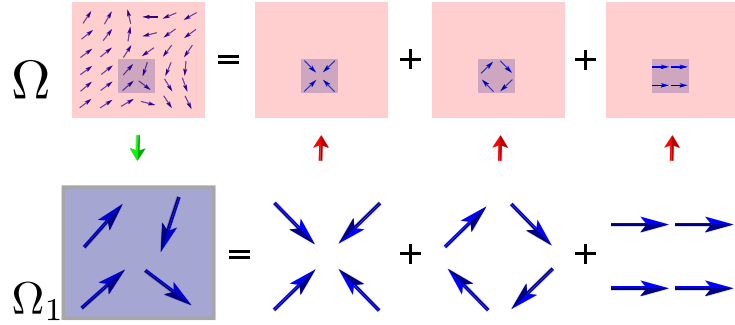


Figura 9 – Ilustração do objetivo da aproximação local, a qual aproxima localmente as componentes no domínio original por componentes obtidas pela decomposição local.

Diferente da decomposição local que identificamos as componentes naturais para um subdomínio, desejamos agora realizar uma aproximação das componentes naturais sob um domínio Ω a partir de informações sobre um subdomínio Ω_1 (Figura 9). Das equações que definem os potenciais naturais (37) temos:

$$\begin{aligned} D^*(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Omega_1} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_1} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ R^*(\mathbf{x}_0) &= - \int_{\Omega_1} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega \setminus \Omega_1} G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (38)$$

Assim, se conseguirmos argumentos para que as integrais $\int_{\Omega \setminus \Omega_1}(\dots)$ sejam ignoradas, ganharemos uma maneira de aproximar as componentes globais localmente. Note que para fluxos turbulentos, rotações contrárias e divergências contrárias são canceladas (influência externa sobre Ω_1 são as internas sobre Ω , logo rotações e divergências), portanto podemos ignorar a integral $\int_{\Omega \setminus \Omega_1}(\dots)$.

Para fluxos não turbulentos, Bhatia argumenta apenas que G_∞ tende a zero a medida que \mathbf{x} e \mathbf{y} se distanciam, contudo verificamos que tal argumento é válido apenas para o caso tridimensional, uma vez que $G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$, mas o mesmo não vale para o caso bidimensional, uma vez que $G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{\log\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{2\pi}$. Pelo contrário, usando um argumento semelhante podemos concluir que $\int_{\Omega \setminus \Omega_1}(\dots)$ não pode ser ignorada para o caso bidimensional, pois $G_\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ aumenta a medida que \mathbf{x} e \mathbf{y} se distanciam.

Do contrário, se faz necessário a análise caso-a-caso. Por exemplo, se Ω é limitado e \mathbf{v} possui uma taxa de decaimento para zero maior que $\frac{1}{x^3}$ na direção da fronteira, podemos com o mesmo argumento utilizado por Bhatia ignorar a parcela $\int_{\Omega \setminus \Omega_1}(\dots)$. Por outro lado se $\Omega = \mathbb{R}^2$ e \mathbf{v} possui a propriedade de ir para zero mais rápido que $1/\|\mathbf{x}\|$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, neste caso a decomposição natural torna-se a decomposição de Helmholtz (Teo. 3.1) e a aproximação local torna-se a decomposição natural, a qual já vimos que podemos ignorar a integral em questão.

Note que pelo fato de não podermos ignorar a integral usando apenas a função de Green devemos adicionar hipóteses sobre o campo vetorial.

Resultados

Apresentaremos na Seção 4.1 como realizar a Decomposição de Helmholtz-Hodge com imposição de condições de fronteira Paralelo-Normal bem como a Decomposição Natural. Na Seção 4.2 abordaremos alguns exemplos e comparações entre os métodos. Por último na Seção 4.3, por meio de uma análise nos potenciais escalares provenientes da decomposição mostraremos que é possível obtermos algumas feições características de um campo vetorial dado.

Como trabalhamos com aproximações do contínuo pelo discreto faz-se necessário o uso de tratamento de erros da aproximação pelo analítico, quando esse está presente. Para mensurar os erros utilizamos a norma L^2 que é definida como a raiz quadrada da soma ao quadrado dos elementos de um vetor e a norma do *máximo* (supremo, infinito) que é definida como a maior entrada de um vetor em valor absoluto. Em símbolos, dado $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|u_i|; 1 \leq i \leq n\}$$

Onde a notação $\|\cdot\|_\infty$ diz respeito a norma do máximo e $\|\cdot\|_2$ representa a norma L^2 , que também é conhecida como norma de Frobenius, a qual é utilizada para matrizes contudo quando a matriz é unidimensional ela comporta-se como a norma L^2 .

Como o resultado das decomposições continuam sendo campos de vetores, utilizamos para as análises de erros pontuais (na existência do analítico) os erros relativo (\mathbf{e}_r), absoluto (\mathbf{e}_a) e de fase (\mathbf{e}_f) em radianos, definidos por

$$\mathbf{e}_r = \frac{\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \mathbf{e}_a = \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_f = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|\|\tilde{\mathbf{u}}\|}\right)$$

onde \mathbf{u} é o vetor exato e $\tilde{\mathbf{u}}$ é o vetor aproximado. Note que o erro relativo é definido apenas quando o vetor exato não é nulo, já o erro de fase quando ambos os vetores são não nulos. Para evitar problemas numéricos no cálculo do erro relativo usaremos uma

cota inferior para o valor de $\|\mathbf{u}\|$ igual a 10^{-6} , ou seja, para valores de $\|\mathbf{u}\| \leq 10^{-6}$ o erro relativo será substituído pelo erro absoluto. Observe que se realizado o cálculo de qualquer um dos erros acima para um campo de vetores discreto, teremos como resultado um vetor de erros, a qual pode ser aplicada a norma do máximo ou L^2 para se obter um erro global. Para avaliar esses erros utilizaremos algumas ferramentas comumente presente na estatística, tais como: *média*, *mediana*, *desvio padrão* e *boxplot* (*diagrama de quartis*).

O desvio padrão dado por

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M_A)^2}$$

é uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados (x_1, x_2, \dots, x_n) com relação a sua média M_A . Ou seja, o desvio padrão indica o quanto um conjunto de dados é uniforme. Quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados.

O boxplot ou diagrama de quartis (ou ainda diagrama de caixa) é uma ferramenta gráfica que permite visualizar a distribuição dos dados ordenando-os de forma crescente, apresentamos um exemplo na Figura 10. A partir daí, são obtidos os valores referentes a 25% das amostras, 50% e 75% que são chamados de primeiro quartil (q_1), segundo quartil (ou mediana) e terceiro quartil (q_3) respectivamente. Também os valores dos limites inferior (W_i) e superior (W_s) (whisker) os quais são $W_i = q_1 - 1.5(q_3 - q_1)$ e $W_s = q_3 + 1.5(q_3 - q_1)$. Finalmente um ponto é considerado um outliers (atípico ou discrepante) se é maior que W_s ou menor que W_i .

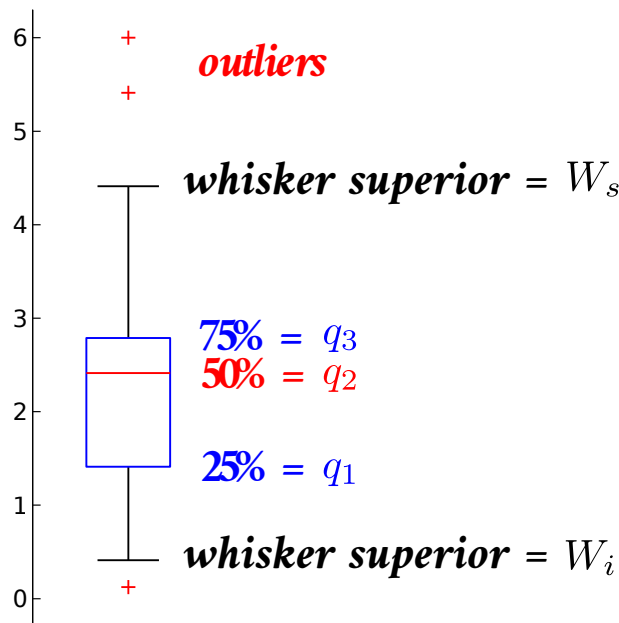


Figura 10 – Apresentação dos elementos presentes no boxplot.

Usamos em todos os exemplos o método de diferenças finitas para a discretização dos problemas, e nos concentramos em domínios retangulares, isto é, $\overline{\Omega} = [a, b] \times [c, d]$ e $\Omega = (a, b) \times (c, d)$. As implementações foram feitas usando o software **MATLAB (R2016b)** e visualização usando o software **MATHEMATICA (11.3.0)**, onde a escala de cores representa a magnitude dos vetores que compõem o campo de vetores.

4.1 Dados de implementação

Exibiremos nesta seção o caminho utilizado para a implementação dos métodos.

Decomposição por Imposição de Condições de Fronteira

[Petronetto et al., 2010] fizeram a **HHD-PN** usando o SPH sem uma estrutura de malha, contudo ele deixa claro a metodologia utilizada e dessa forma adaptamos para o Método de Diferenças Finitas. Para decompor um campo vetorial suave $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ com condições de fronteira é necessário montar e resolver os sistemas

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta\varphi & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot (J\mathbf{v}) = -\Delta\psi & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (39)$$

Calculamos o gradiente e divergente como descrito na Seção 2.3 e daí somos capazes de resolver estas equações de Poisson. Para tal, usamos a metodologia descrita na mesma seção e de cada um dos problemas de contorno (39) uma equação do tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ deve ser resolvida para então obtermos os potenciais φ e ψ (como o Ex. 2.6). Resolvemos as equações usando o método de *Gauss Seidel (GS)*¹ e o método *Generalized minimum residual (GMRES)*¹ proveniente do MATLAB. Por fim, para obtermos a decomposição que denotaremos por $\mathbf{v} = \mathbf{d}_{\text{PN}} + \mathbf{r}_{\text{PN}} + \mathbf{h}_{\text{PN}}$, devemos aplicar o operador gradiente nos potenciais obtidos anteriormente para conseguir as componentes $\mathbf{d}_{\text{PN}} = \nabla\varphi$ e $\mathbf{r}_{\text{PN}} = J(\nabla\psi)$. Lembrando que a componente harmônica é a diferença entre o campo vetorial e as outras componentes, $\mathbf{h}_{\text{PN}} = \mathbf{v} - \mathbf{d}_{\text{PN}} - \mathbf{r}_{\text{PN}}$.

Daqui em diante utilizaremos a nomenclatura GS e Gauss Seidel para indicar a decomposição de Helmholtz-Hodge com condições de fronteira Paralelo-Normal utilizando o método de Gauss Seidel para solução do sistema linear oriundo das equações de Poisson para a obtenção dos potenciais escalares. Analogamente para o método GMRES.

Vale ressaltar que o método de Gauss Seidel utilizado foi implementado sem fator de sobre-relaxação. Em contrapartida o método GMRES utilizado é nativo do MATLAB, o qual é otimizado e possui pré-condicionador.

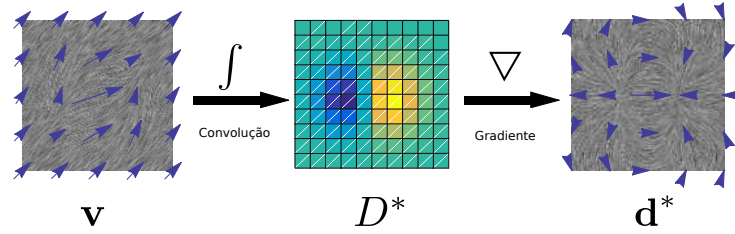


Figura 11 – Representação da decomposição natural para a componente irrotacional, dado o campo vetorial \mathbf{v} realizamos a convolução com a função de Green para a obtenção do potencial D^* e a seguir obtemos a componente natural \mathbf{d}^* da decomposição natural de Helmholtz-Hodge.

Decomposição Natural

A Figura 11 realça os dois grandes passos na decomposição natural. Dado um campo vetorial \mathbf{v} , vimos na Seção 3.3 que para alcançar os potenciais naturais devemos realizar a convolução da função de Green com o campo operado por um operador diferencial, obtendo

$$D^*(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$$

$$R^*(\mathbf{x}_0) = - \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$$

onde o divergente é calculado como descrito na Seção 2.3 e o rotacional é dado pelo divergente, $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \cdot J(\mathbf{v})$, a partir desses potenciais, são calculadas as componentes da decomposição, $\mathbf{d}^* = \nabla D^*$ e $\mathbf{r}^* = J(\nabla R^*)$ (Figura 12).

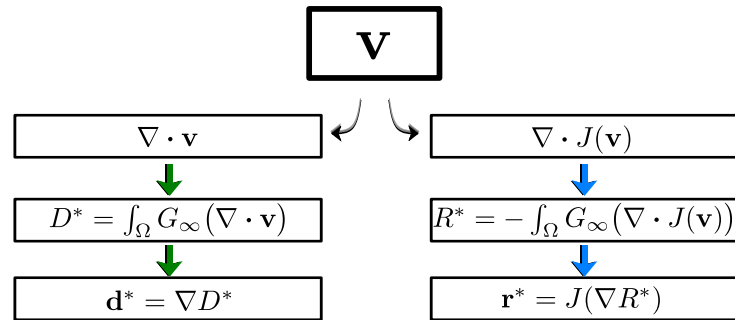


Figura 12 – Passo a passo para a obtenção das componentes naturais que exercem influência interna, onde a componente harmônica, que exerce influência externa, é dada por $\mathbf{h}^* := \mathbf{v} - \mathbf{d}^* - \mathbf{r}^*$.

Para a integração utilizamos a função *trapz* nativa do MATLAB que calcula uma aproximação para a integral usando o método do trapézio. Durante a integração, evidentemente em algum momento teremos $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, tanto numérica quanto analiticamente, e como vimos na Seção 2.4 a Função de Green $G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ tem uma singularidade em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Contudo, atribuímos o valor $G_{\infty}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0) = 0$ e como justificativa, observamos a desigualdade 25 na demonstração do Teorema da solução da equação de Poisson (Teo.

¹ Detalhes podem ser obtidos em [Barrett et al., 1994].

2.8), a qual diz que a integral supracitada tende a zero quando estamos sobre uma bola de centro \mathbf{x}_0 tendendo a zero, isto é, a medida que refinamos a malha a integral em uma vizinhança de \mathbf{x}_0 tende a zero.

4.2 Resultados

Mostraremos nesta seção exemplos, comparações e discussões sobre os métodos apresentados.

Alguns dos exemplos aqui expostos foram feitos usando o caminho contrário do que foi visto até agora, da seguinte maneira, a partir de dois campos potenciais φ, ψ e dos operadores diferenciais obtemos $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ e $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$. Daí adicionando uma componente harmônica obtemos um campo vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}$, ao qual pode ser aplicado a teoria vista e comparado, uma vez que o campo analítico é conhecido. Para campos dessa forma usaremos a notação $\mathbf{d}_0, \mathbf{r}_0$ e \mathbf{h}_0 para indicar campos analíticos.

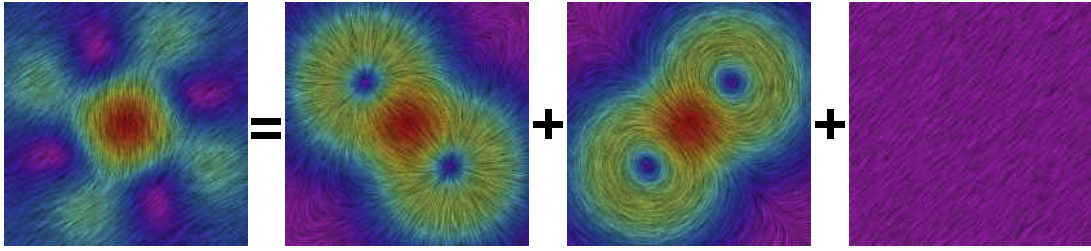


Figura 13 – $\mathbf{v} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0$.

Exemplo 4.1. Consideramos para esse exemplo um campo vetorial com dois vórtices de rotações contrárias, uma fonte e um sorvedouro. O vórtice com rotação no sentido horário está com seu centro no ponto $(1, 1)$ e o de sentido anti-horário com centro no ponto $(-1, -1)$, a fonte está no ponto $(1, -1)$ e o sorvedouro no ponto $(-1, 1)$, todos com decaimento exponencial. Para mais clareza, segue as funções utilizadas para a construção do campo $\mathbf{v} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0$ e sua ilustração na Figura 13.

$$\mathbf{d}_0(x, y) = \nabla\gamma(x - 1, y + 1) - \nabla\gamma(x + 1, y - 1) \quad (40)$$

$$\mathbf{r}_0(x, y) = J(\nabla\gamma(x - 1, y - 1)) - J(\nabla\gamma(x + 1, y + 1)) \quad (41)$$

$$\mathbf{h}_0(x, y) = (1, 1) \quad (42)$$

onde $\gamma(x, y) = -e^{\frac{-x^2 - y^2}{2}}$.

A construção das componentes dessa maneira, deixa claro que \mathbf{d}_0 tem rotacional nulo, \mathbf{r}_0 tem divergente nulo e que $\frac{\partial(1)}{\partial x} = \frac{\partial(1)}{\partial y} = 0$ garantem que \mathbf{h}_0 é harmônico. Lembrando que ao tratarmos de problemas de contorno com condições puramente Neumann devemos verificar se a Equação 8 é satisfeita para cada um dos sistemas em 39. Realizamos a

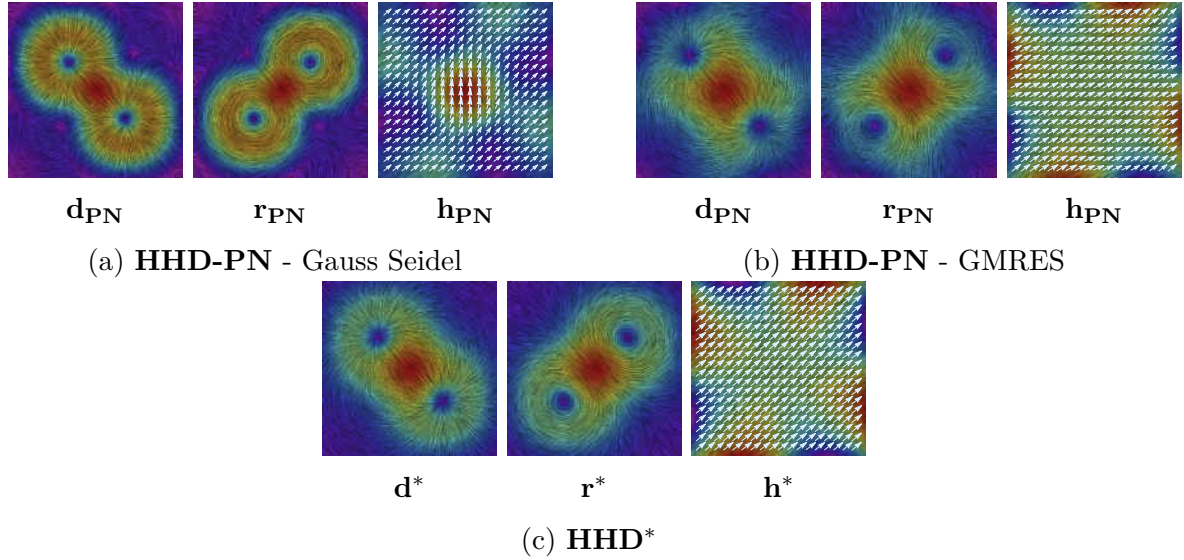


Figura 14 – Decomposições de Helmholtz-Hodge. Em (a) apresentamos a decomposição de Helmholtz-Hodge utilizando condições de fronteira Paralelo-Normal e o método Gauss Seidel para a resolução dos sistemas lineares. Em (b) mudamos apenas a forma de resolver os sistemas lineares, usamos o método GMRES. E finalmente em (c) apresentamos a decomposição natural. Para cada decomposição lê-se da esquerda para a direita: componente irrotacional, solenoidal e harmônica.

verificação numericamente e obtemos -6.9×10^{-17} e 5.4×10^{-16} respectivamente, portanto os sistemas são consistentes.

Começaremos analisando a componente harmônica, uma vez que a mesma é a diferença do campo dado pelas outras componentes, acumulando assim os erros. Verificando a Figura 14, visualmente percebemos diferenças notáveis entre as decomposições, vemos também que a decomposição usando GMRES aproxima-se melhor do campo constante (1,1) que usando Gauss Seidel. Contudo analisando a norma L^2 sobre os vetores de erros angulares, constatamos que, usando Gauss Seidel para resolver o sistema obtemos um melhor resultado frente a GMRES, vide Tabela 2. Entretanto percebemos que para a norma do máximo obtemos o contrário, para isso basta um valor alto para que a norma tenha um valor elevado, mas não é o caso.

	HHD-PN		HHD*
	GS	GMRES	
$\ \mathbf{e}_f(\Omega)\ _2$	19.5	23.4	9.82
$\ \mathbf{e}_f(\Omega)\ _\infty$	0.71	0.43	0.15

Tabela 2 – Erro angular da componente \mathbf{h} , valores em radiano.

Ainda sobre o erro angular, percebemos na Figura 15 a existência de muitos outliers altos usando GS, mesmo isso não é suficiente para que o seu erro seja menor que GMRES. Mas se analisarmos a mediana de ambos verificamos que a decomposição usando GS é muito menor que GMRES e o contrário ocorre na dispersão dos valores, acarretando um

desvio padrão maior para GS (Tabela 3).

Em outras palavras, a componente harmônica proveniente da decomposição usando Gauss Seidel para resolver o sistema linear retorna mais vetores próximos aos analíticos e mais vetores longe dos analíticos (distância no sentido angular) que a decomposição usando GMRES.

Observando os mesmos objetos, porém levando em conta os dados obtidos pela decomposição natural, fica evidente que em relação ao erro de fase a decomposição natural é a que melhor extrai a componente harmônica. Tratamento semelhante pode ser realizado com os outros erros mas apresentamos apenas os valores na norma L^2 dos vetores de erros na Figura 16a e a decomposição natural continua obtendo melhores resultados.

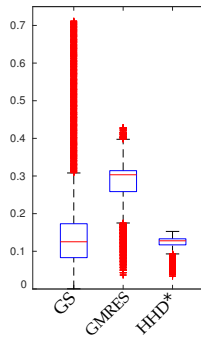
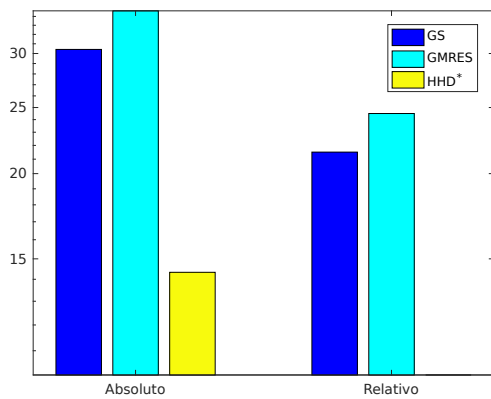


Figura 15 – Boxplot da matriz dos erros de fase.

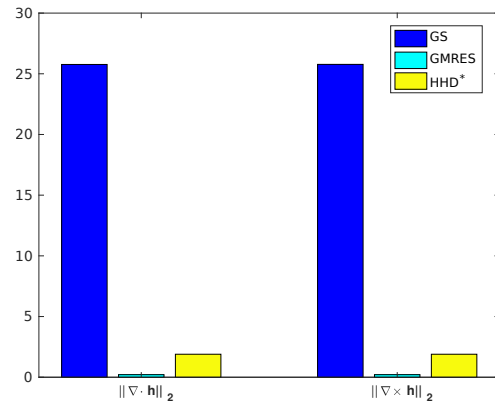
	HHD-PN		HHD*
	GS	GMRES	
Média	0.18	0.28	0.12
Des. Padrão	0.16	0.07	0.02
Mediana	0.13	0.30	0.13
nº outliers	949	156	204

Tabela 3 – Análise estatística da componente \mathbf{h} , as três linhas superiores estão em radiano.

Em todas as decomposições verificamos que como esperado, as componentes irrotacionais têm rotacional nulo, bem como as componentes solenoidais têm divergência nula, pois todas estão na ordem de 10^{-13} . Na Figura 16b apresentamos o gráfico referente a norma L^2 obtido pela aplicação dos operadores diferenciais, rotacional e divergente, nas componentes harmônicas.



(a) Erros absoluto e relativo sobre a componente \mathbf{h} sobre a norma L^2 .



(b) Norma L^2 sobre os operadores diferenciais aplicados à componente harmônica.

Figura 16 – Em azul apresentamos a decomposição usando GS, em ciano usando GMRES e em amarelo a decomposição natural.

Com a atenção na componente irrotacional, com relação aos erros angulares e absolutos novamente a decomposição natural apresenta melhores resultados, apresentamos apenas o erro absoluto na Figura 17. Na mesma figura contudo, vemos que seu erro relativo é o pior.

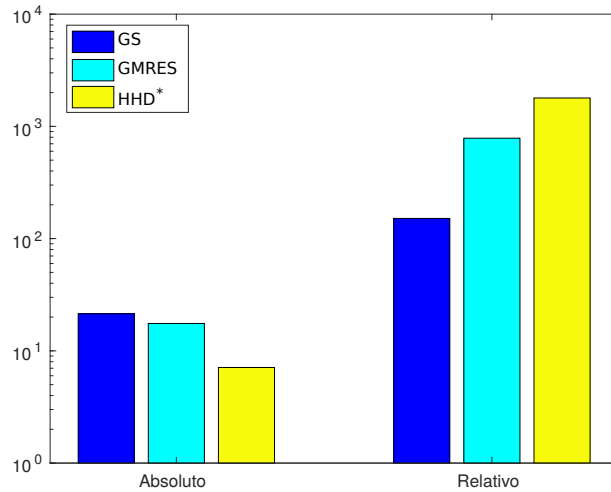


Figura 17 – Erros absoluto e relativo sobre a componente \mathbf{d} sobre a norma L^2 .

Para obtermos melhores esclarecimentos sobre o por que, recorreremos novamente as ferramentas estatísticas para tal. A Tabela 4 exibe os valores dos quartis de cada uma das decomposições referente ao erro relativo da componente irrotacional. Notamos que em relação aos dois primeiros quartis obtemos melhores resultados para GMRES que GS e o contrário para o terceiro quartil, com uma grande diferença. Notamos na terceira coluna da tabela que os valores obtidos pela decomposição natural são inferiores as outras decomposições mesmo com erro relativo maior.

Para entendermos essa “anomalia”, constatamos a existência de alguns pontos com erros muito altos, da ordem de 10 vezes mais que GS, o que eleva o valor da norma. Entretanto tais erros estão localizados apenas nos cantos do domínio de maneira isolada, vide a Figura 18.

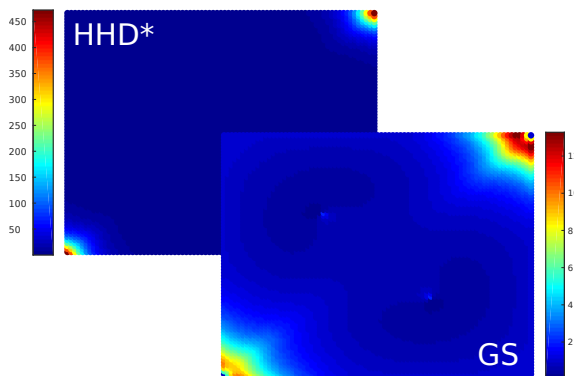


Figura 18 – Representação em cores dos valores referentes ao erro relativo sobre a componente \mathbf{d} .

	GS	GMRES	HHD*
1º Quartil	0.58	0.42	0.16
Mediana	0.72	0.63	0.23
3º Quartil	1.01	1.39	0.60

Tabela 4 – Tabela de valores dos quartis em relação aos erros relativos de \mathbf{d} .

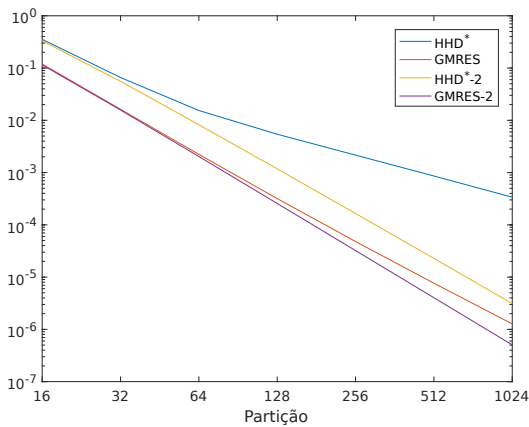
Em contrapartida percebemos que há uma variação do erro relativo ao longo de todo o domínio quando usamos Gauss Seidel para resolver o sistema linear para o problema de Poisson gerado pela decomposição por imposição de condições de fronteira.

Os resultados obtidos pela componente solenoidal foram exatamente os mesmos que a componente irrotacional, isso reforça o fato que a decomposição de Helmholtz-Hodge extrai de maneira estrutural as componentes do campo vetorial, uma vez que a componente solenoidal é uma rotação (função J) e translação dos objetos utilizados na componente irrotacional (vide Equações 41 e 42).

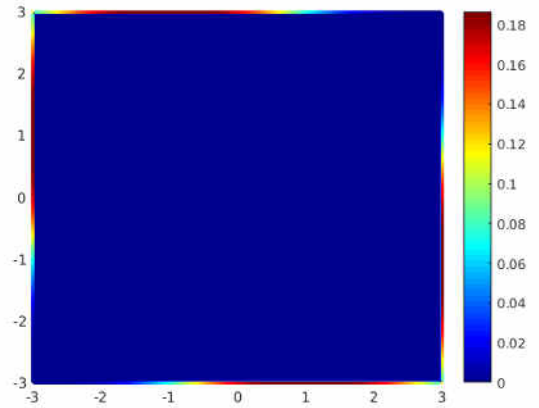
Realizamos o teste da ortogonalidade entre as componentes \mathbf{d} e \mathbf{r} de cada método (Equação 32), mesmo sem a garantia da ortogonalidade e exibimos os valores na Tabela 5. A decomposição utilizando GS obteve o melhor resultado e pela ordem de grandeza podemos atribuir a ortogonalidade entre suas componentes.

GS	GMRES	HHD*
0.00515	2.165	0.520

Tabela 5 – Teste da ortogonalidade L^2 .



(a) Representação para $\|\nabla \cdot \mathbf{h}\|_2$, onde o sufixo “-2” simboliza os dados que tiveram algumas camadas de fronteiras não computadas.



(b) Representação pontual de $\nabla \cdot \mathbf{h}^*$ para o caso $l = 10$.

Figura 19 – Análise de convergência da componente harmônica em relação ao divergente. O refinamento se deu pelo aumento da partição para cada instante, sendo portanto os valores dados por $2^l \times 2^l$ onde $l \in \{4, \dots, 10\}$.

Até o momento estávamos com o domínio $[-3, 3] \times [-3, 3]$ e partição 80×80 , porém realizamos também um refinamento da partição dada por $2^l \times 2^l$ onde $l \in \{4, \dots, 10\}$ e mantendo o domínio. Portanto, para cada valor de l , a malha é o conjunto

$$M = \{(-3 + ih, -3 + jk); i, j \in \{0, 1, \dots, 2^l\}\}$$

e $h = k = \frac{6}{2^l}$. Exibimos na Figura 19a a norma L^2 aplicada ao divergente da componente harmônica a cada etapa do refinamento. Identificamos na Figura 19b que os pontos com os

maiores valores encontram-se na fronteira, portanto apresentamos também na Figura 19a os valores da mesma operação com uma pequena restrição ao domínio, de outra maneira, após o cálculo das decomposições usamos a malha M com $i, j \in \{(l-3), (l-2), \dots, 2^l - l + 1\}$, ou seja, é o mesmo que retirar $l-3$ “camadas” da fronteira.

◆

Exemplo 4.2. O domínio usado nesse exemplo é $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ particionado em 50×50 , isto é, a malha é o conjunto

$$M = \{(-1 + ih, -1 + jk); i, j \in \{0, 1, \dots, 50\}\}$$

onde $h = k = \frac{2}{50} = 0,04$. Para a criação do campo vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0$ usamos

$$\mathbf{d}_0(x, y) = \nabla(-e^{-5(x^2+y^2)})$$

$$\mathbf{r}_0(x, y) = J(\nabla(-e^{-5(x^2+y^2)}))$$

$$\mathbf{h}_0(x, y) = \nabla(e^x \sin(y))$$

Como vimos na Seção 3.1, \mathbf{d}_0 e \mathbf{r}_0 como acima propostos são respectivamente irrotacional e solenoidal, note também que

$$\mathbf{h}_0 = (e^x \sin(y), e^x \cos(y))$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h}_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (e^x \sin(y), e^x \cos(y)) = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{h}_0 = \nabla \cdot J(\mathbf{h}_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (e^x \cos(y), -e^x \sin(y)) = e^x \cos(y) - e^x \cos(y) = 0$$

portanto garantimos que \mathbf{h}_0 é um campo harmônico. Exibimos as componentes e o campo final na Figura 20.

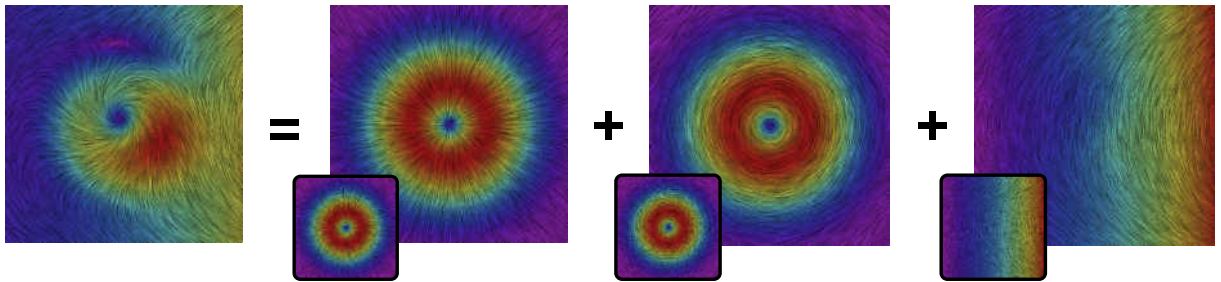


Figura 20 – $\mathbf{v} = \mathbf{d}^* + \mathbf{r}^* + \mathbf{h}^*$, as figuras menores representam o campo analítico.

Para o caso **HHD-PN** devemos verificar a Equação 8. Realizamos a verificação numericamente e obtemos o valor -0.22 para um dos sistemas, o que em nosso entendimento não é uma boa aproximação para zero. Portanto não a realizamos, pois neste caso o problema é inconsistente. A título de curiosidade, verificamos a ortogonalidade entre as componentes que exercem influência interna provenientes da decomposição natural e obtivemos o valor 0.30. Como a ortogonalidade não é garantida apenas atestamos que o exemplo em questão não goza de tal propriedade.

◆

Dependendo do caso a presença de ventos pode ser bem vinda ou não, um exemplo positivo é em uma estação de produção de energia eólica. Há outros casos em que a presença dos ventos não é desejada, como entornos de construções de arranha céus. Para o primeiro exemplo, é desejado que os ventos tenham uma “estrutura” de campos harmônicos constantes, já para o segundo, a presença de vórtices é o menos desejado. Notamos nesses exemplos uma utilidade para a decomposição de Helmholtz-Hodge, pois para o primeiro o HHD pode ser útil para determinar um local e orientação e para o segundo caso, determinar um dia-horário para que possam ser utilizados guindastes com mais segurança mediante previsões climáticas, por exemplo.

Exemplo 4.3. Abordaremos nesse exemplo um campo de vetores que representa o vento sobre uma determinada área, veja o campo na Figura 21. Os dados utilizados são disponibilizados internamente no MATLAB, como não estão disponíveis (não existem) as componentes analíticas do campo \mathbf{v} , não é possível fazer uma comparação. Entretanto podem ser realizadas aferições sobre as componentes. Apresentamos na Figura 22 a decomposição natural do campo \mathbf{v} .

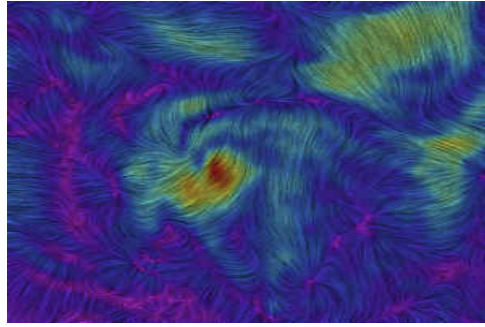


Figura 21 – Campo vetorial \mathbf{v}

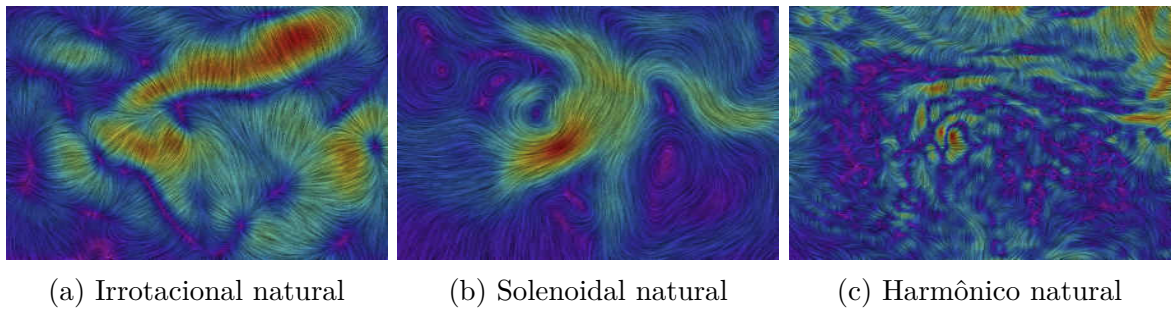


Figura 22 – Componentes provenientes da decomposição natural

Calculamos o rotacional e o divergente de \mathbf{h}^* e apresentamos na Figura 23 o boxplot sobre a componente harmônica. Calculamos também o rotacional da componente \mathbf{d}^* e o divergente da componente \mathbf{r}^* , os resultados foram da ordem de 10^{-14} para ambos erros, ou seja, a decomposição retornou de fato uma componente irrotacional e uma solenoidal. Há também de se levar em conta a quantidade de pontos utilizado para a

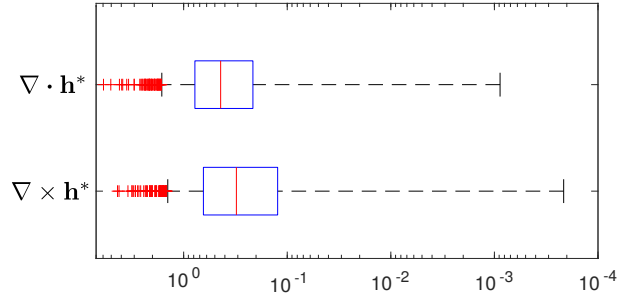


Figura 23 – Boxplot do rotacional e divergente sobre a componente \mathbf{h}^*

discretização, neste exemplo o domínio é $[70, 134] \times [17, 60]$ particionado em 40×34 , isto é, uma partição relativamente pequena caso deseje erros numa escala menor. De fato, apresentamos no Apêndice A a convergência dos operadores diferenciais utilizados, e verificamos que por exemplo, para uma partição 32×32 os erros estão entre 10^{-1} e 10^{-2} , já para 8192×8192 os erros estão próximos da ordem 10^{-6} . Portanto o acúmulo dos erros obtidos durante a obtenção das componentes que exercem influência interna são transferidos para a componente harmônica e por esse motivo \mathbf{h}^* apresenta os erros da Figura 23.

◆

Reservatórios de petróleo são formações rochosas sedimentares que possuem diversos espaços vazios. Esses espaços vazios formam redes de poros interconectados que armazenam e permitem o escoamento de fluidos, como é o caso do petróleo. Simulações numéricas dos escoamentos em reservatórios são utilizadas para estimar características de produção, como por exemplo o padrão do fluxo, na tentativa de buscar a utilização ótima dos campos de produção de petróleo.

Exemplo 4.4. Este exemplo apresenta a decomposição de um campo vetorial (Figura 24) obtido por uma simulação de fluidos em meios porosos².

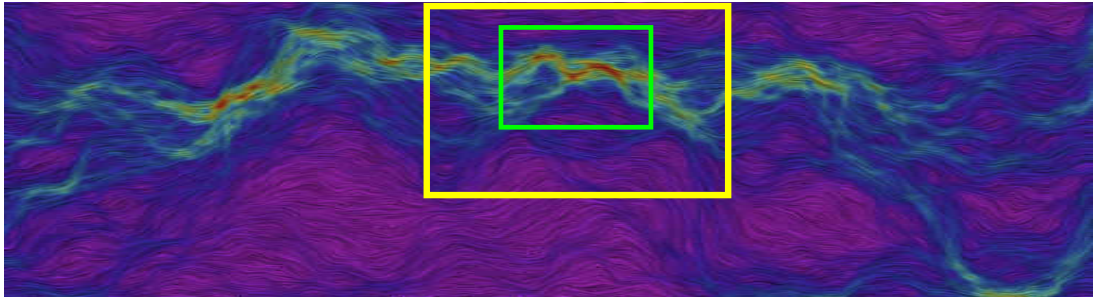


Figura 24 – Representação do escoamento do fluido. Os destaques são referentes a decomposição local, a cor verde representa a região dada por Ω_1 e a região em amarelo representa Ω_2 .

Teoricamente o escoamento é incompressível, portanto quando realizada a decomposição natural a componente \mathbf{d}^* de maneira analítica deve ser nula. Contudo obtemos um

² Pôster disponível [aqui](#).

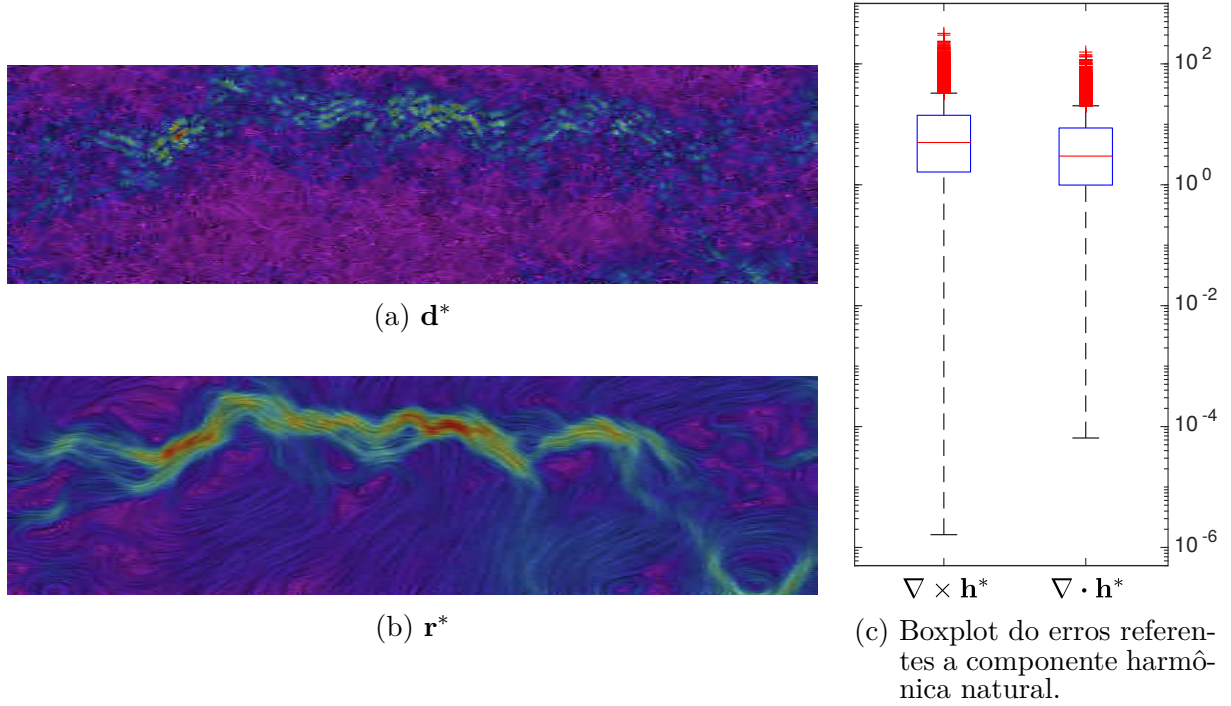


Figura 25 – Componente irrotacional natural (a), componente solenoidal natural (b). Apresentamos em (c) o boxplot dos erros obtidos pela componente harmônica natural que contai os erros gerados ao longo de todo processo.

campo não nulo, com valores para a mediana e desvio padrão de 0.25 e 0.32 respectivamente, algo próximo de um ruído, veja a Figura 25a. Isso pode dar-se pela composição de erros, tanto na simulação para a obtenção do campo de vetores quanto na decomposição e tais erros aparecem também na componente $\mathbf{h}^* = \mathbf{v} - \mathbf{d}^* - \mathbf{r}^*$. Já em relação a estrutura da decomposição, obtemos que as componentes que exercem influência interna são de fato irrotacional e solenoidal, com valores na ordem de 10^{-12} .

Como vimos ao final da Seção 3.3, podemos fazer a decomposição local dos campos caso tenhamos interesse de decompor o campo apenas em um subdomínio. Para exibi-la continuaremos neste o exemplo. O domínio original deste exemplo é $\bar{\Omega} = [0, 220] \times [0, 60]$ e realizaremos a decomposição local em duas subregiões, a primeira e menor será $\bar{\Omega}_1 = [100, 130] \times [35, 55]$ a segunda será $\bar{\Omega}_2 = [85, 145] \times [20, 60]$, a representação das regiões podem ser vistas na Figura 24.

Ao realizarmos a decomposição (local) para cada um dos domínios (Ω , Ω_1 e Ω_2) obtemos suas respectivas componentes. Como neste caso as analíticas não existem, para fim de comparação utilizaremos as componentes em Ω como analíticas, isto é, faremos aproximações locais sobre cada região. Considere as componentes \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 das decomposições em Ω , Ω_1 e Ω_2 respectivamente. Apresentamos na Figura 26 as componentes solenoidais em Ω_1 (a) e em Ω_2 (b) que representam as decomposições locais em seus respectivos domínios.

Analisaremos apenas as componentes solenoidais. Restringiremos Ω na região Ω_1 e Ω_2 para que dessa forma a análise seja realizada sobre uma mesma região.

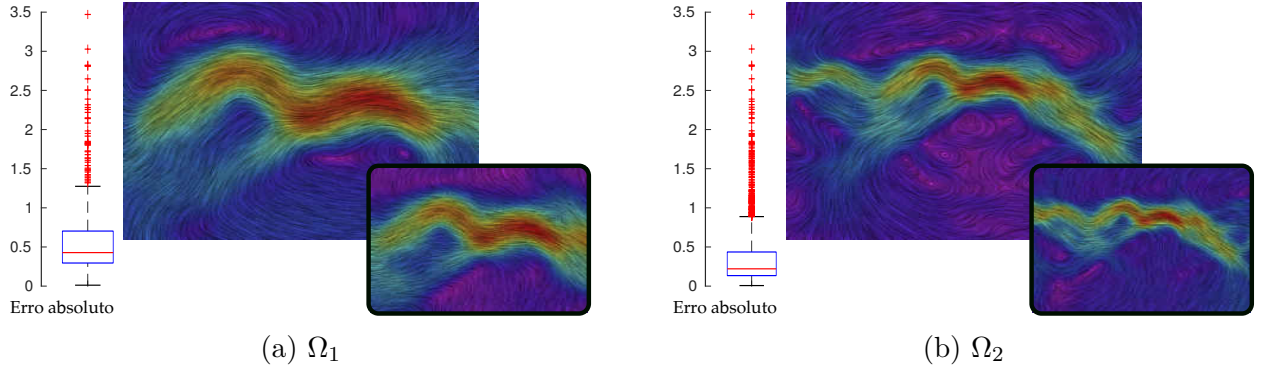


Figura 26 – Apresentação da componente \mathbf{r}^* da decomposição realizada em Ω_1 (a) e a decomposição realizada em Ω_2 (b) bem como o boxplot dos erros absolutos. As figuras menores correspondem a restrição de Ω a região em questão.

Percebemos pelo boxplot na Figura 26 que ao aumentarmos a quantidade de amostras do campo vetorial a decomposição melhora, haja vista que tendemos ao campo original que foi utilizado como analítico e foi previsto tal comportamento na Seção 3.3. De maneira semelhante ocorre com a componente irrotacional. Verificamos também o divergente das componentes harmônicas, para a componente obtida pela decomposição em Ω_1 e comparada com a restrição de Ω sobre o mesmo subdomínio obtemos os valores para a mediana e desvio padrão de 0.10 e 0.24 respectivamente. Para a decomposição em Ω_2 e comparada com a restrição de Ω à Ω_2 obtemos os valores para a mediana e desvio padrão de 0.048 e 0.166 respectivamente. Resultados semelhantes são obtidos através da aplicação do rotacional sob a componente harmônica.

Realizamos também a comparação entre Ω restrito a Ω_1 , Ω_2 restrito a Ω_1 e Ω_1 . Apresentamos na Figura 27 um “fluxograma” para um melhor entendimento que indica três decomposições, que são:

- A decomposição nomeada por $dec - 0$ é obtida através da \mathbf{HHD}^* em \mathbf{v} sobre Ω e a restrição de todas as componentes sobre Ω_1 .
- A decomposição nomeada por $dec - 1$ é obtida restringindo \mathbf{v} em Ω_1 e então realizando a \mathbf{HHD}^* nesta restrição, obtendo assim, componentes sobre Ω_1 .
- A decomposição nomeada por $dec - 2$ é obtida restringindo \mathbf{v} em Ω_2 e então realizando a \mathbf{HHD}^* nesta restrição e finalmente restringindo estas componentes em Ω_1 .

Percebemos na Figura 28 que de fato a segunda integral em (Equação 38) não deve ser ignorada, pois quando aumentamos o domínio no sentido de tender ao domínio original, obtemos melhores resultados. O boxplot refere-se ao erro absoluto da referida decomposição com a decomposição em Ω restrita ao domínio em questão, haja vista que tomamos as componentes em Ω como analíticas. ♦

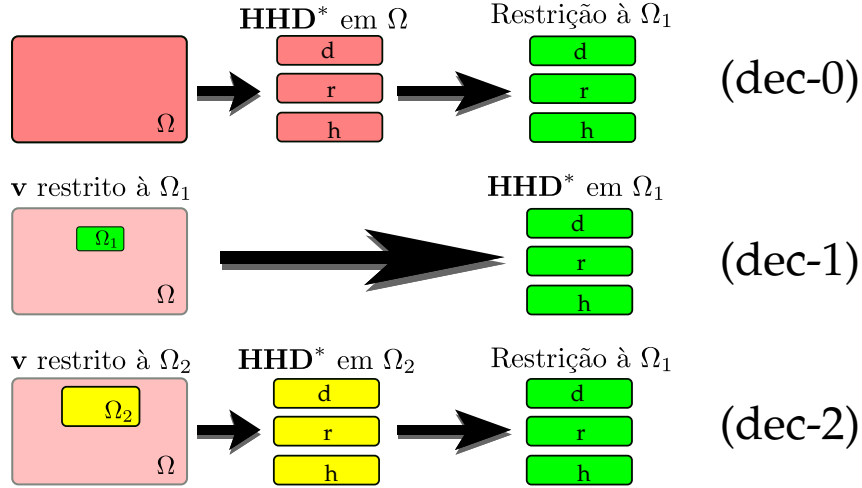


Figura 27 – Fluxograma representativo das decomposições locais para a utilização na aproximação local.

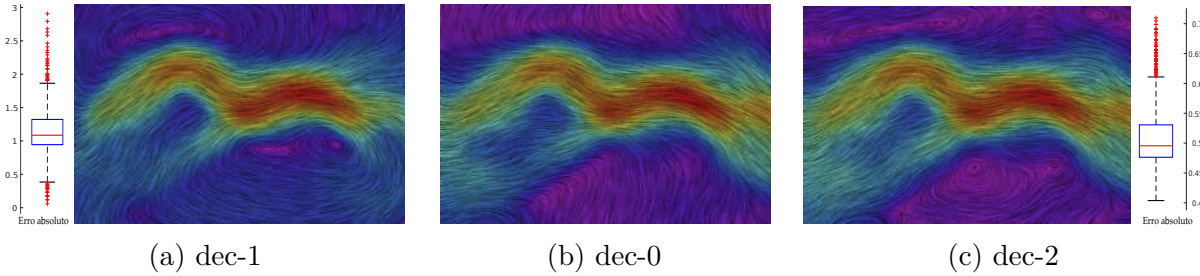


Figura 28 – Decomposições restritas à Ω_1 . Onde (a) é a **HHD*** realizada em Ω_1 , (b) é a **HHD*** realizada em Ω restrita à Ω_1 e (c) é a **HHD*** realizada em Ω_2 restrita à Ω_1 .

Exemplo 4.5. Observamos também que a natureza do campo deve ser conhecida, de fato, veja a Figura 29 a qual apresentamos a decomposição de Helmholtz-Hodge utilizando condições de Dirichlet em todo o bordo e a decomposição natural. Nitidamente é exposto a importância de sabermos de onde vem o campo para conhecermos a decomposição correta - coerente com o desejado, a ser utilizada. Para esse campo vetorial poderíamos ter realizado a decomposição impondo as condições Paralelo-Normal, mas para isso, faz-se necessário a verificação da que garante que o problema está bem definido (Eq. 8), a qual obtemos o valor de -2.16 e portanto esta decomposição não pode ser realizada.

O campo vetorial da Fig. 29 tem uma particularidade, a componente \mathbf{d}_0 utilizada para a criação do campo \mathbf{v} é na verdade um campo harmônico. Para ficar claro, usamos $\mathbf{d}_0 = \nabla(xy)$, e daí temos

$$\nabla \cdot \mathbf{d}_0 = \nabla \times \mathbf{d}_0 = 0$$

e portanto $\mathbf{v} = \mathbf{r}_0 + \tilde{\mathbf{h}}_0$, para $\tilde{\mathbf{h}}_0 = \mathbf{d}_0 + \mathbf{h}_0$. Tal particularidade é bem apreciada pela decomposição natural, uma vez que o campo \mathbf{d}^* tem módulo máximo na ordem 10^{-15} , isso vem do fato que a decomposição natural é realizada pelo ponto de vista da influência dos campos. Como o campo harmônico (que neste caso é $\mathbf{d}_0 + \mathbf{h}_0$) não exerce influência interna e o campo que exerce influência interna é solenoidal (por criação de \mathbf{v}) obtemos

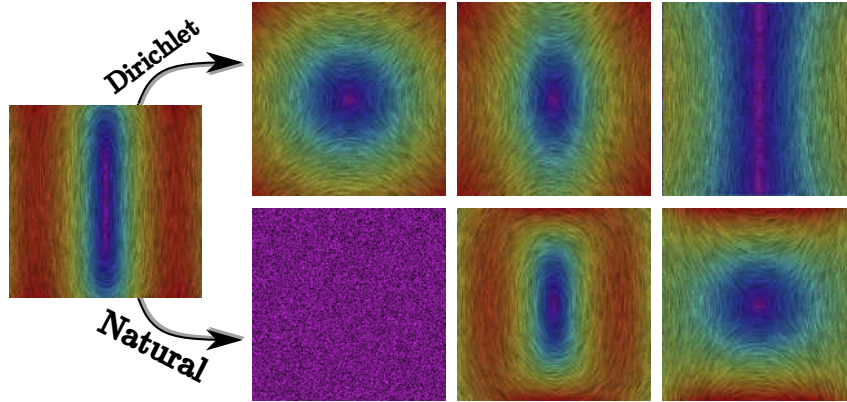


Figura 29 – Um campo vetorial \mathbf{v} decomposto de duas maneiras, por **HHD** com condições de Dirichlet (linha superior) e a **HHD*** (linha inferior). A primeira coluna refere-se à componente irrotacional, a segunda à solenoidal e a terceira à harmônica.

que a componente irrotacional é nula.

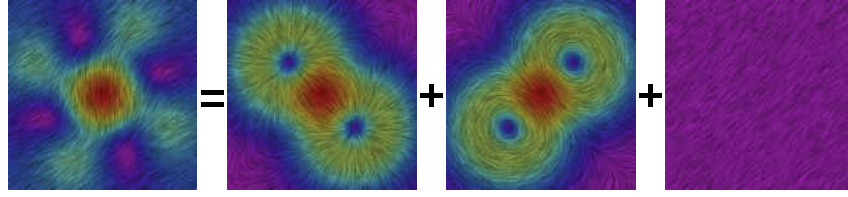
Portanto exibimos neste exemplo uma clara vantagem da decomposição natural comparada a decomposição Paralelo-Normal, haja vista que a última não pode ser aplicada neste caso. Percebemos também que a **HHD*** realizou com maestria a verificação da existência das componentes que exercem influência interna. ♦

4.3 Identificação de Singularidades

As singularidades (pontos críticos), como *fontes*, *sorvedouros* e *vórtices*, representam *feições características* básicas de um campo vetorial [Petronetto, 2008]. A detecção dessas singularidades é muito importante para a análise do campo vetorial, uma vez que elas determinam o comportamento físico do campo vetorial. A partir da decomposição de Helmholtz-Hodge as singularidades são identificadas como os pontos críticos dos potenciais escalares utilizados para obtenção das componentes irrotacional e solenoidal. Nos baseamos em [Polthier and Preuß, 2003] e [Petronetto et al., 2010] para a identificação de tais singularidades.

Dado um campo vetorial $\mathbf{v} = \nabla\varphi + J(\nabla\psi) + \mathbf{h}$ definimos:

1. (*Fonte*) Um ponto da malha representa uma fonte se ele for um ponto de máximo local da função φ ;
2. (*Sorvedouro*) Um ponto da malha representa um sorvedouro se ele for um ponto de mínimo local da função φ ;
3. (*Vórtice Horário*) Um ponto da malha representa um vórtice com rotação no sentido horário se ele for um ponto de mínimo local da função ψ ;
4. (*Vórtice Anti-horário*) Um ponto da malha representa um vórtice com rotação no sentido anti-horário se ele for um ponto de máximo local da função ψ ;

Figura 30 – $\mathbf{v} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}_0$

Vamos usar o Exemplo 4.1 para aplicar a metodologia acima de obtenção de singularidades, o qual apresentamos na Figura 30 as componentes analíticas utilizadas para a obtenção do campo vetorial \mathbf{v} .

Uma vez que para identificar as singularidades precisamos apenas das componentes de uma decomposição, podemos realizar a identificação para cada método usado no Ex. 4.1. Exibimos na Tabela 6 as posições de cada singularidade obtida. Advertimos que a utilização do método de Gauss Seidel para a solução dos sistemas lineares atribuiu à componente solenoidal três vórtices, os quais não deveriam existir. E mais, quando refinamos a malha para 256×256 obtemos um total de 7 fontes, 7 sorvedouros, 11 vórtices em sentido horário e apenas 1 em sentido anti-horário. Já os outros dois métodos, GMRES e **HHD***, mantêm as singularidades invariantes ao refinamento. Exibimos na Tabela 7 o mesmo campo para uma partição ainda mais fina, 1024×1024 .

	HHD*	HHD-PN	
		GS	GMRES
Fonte	(1.2, -1.0)	(1.3, -1.1)	(1.1, -0.8)
Sorvedouro	(-1.0, 1.2)	(-1.1, 1.3)	(-0.8, 1.1)
Vórtice anti-horário	(-1.0, -1.0)	(-1.1, -1.1)	(-0.8, -0.8)
Vórtice horário	(1.2, 1.2)	(1.3, 1.3)	(-2.4, -2.8)
			(1.1, -2.8)
			(-2.4, 1.1)

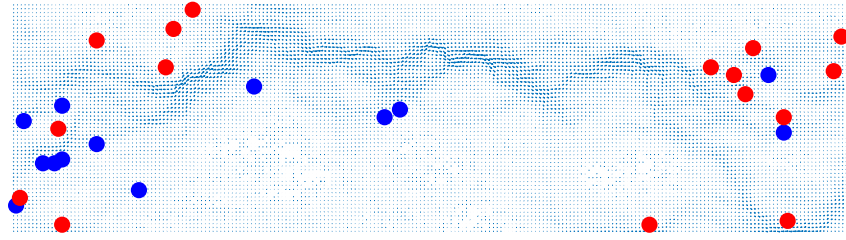
Tabela 6 – Posições das singularidades do campo usado no Ex. 4.1 por cada método com partição de 80×80 .

	HHD*	HHD-PN GMRES
Fonte	(1.09, -1.08)	(1.19, -1.18)
Sorvedouro	(-1.08, 1.09)	(-1.18, 1.19)
Vórtice anti-horário	(-1.08, -1.08)	(-1.18, -1.18)
Vórtice horário	(1.09, 1.09)	(1.19, 1.19)

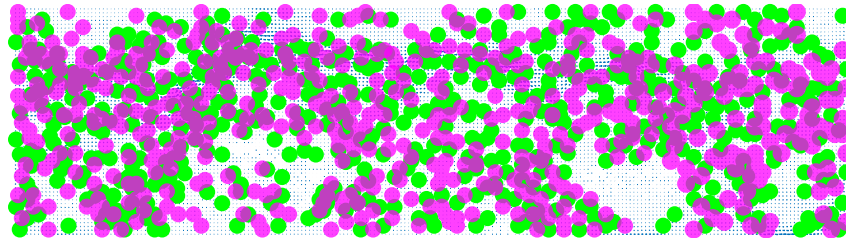
Tabela 7 – Posições das singularidades do campo usado no Ex. 4.1 pelos métodos **HHD*** e GMRES, com partição de 1024×1024 .

Apresentamos na Figura 31 as singularidades obtidas do campo abordado no exemplo de extração de petróleo (Ex. 4.4), observamos que de fato, a componente irrotacional

apresenta um comportamento peculiar. A componente \mathbf{d}^* possui 539 sorvedouros e 524 fontes, já \mathbf{r}^* possui 16 vórtices anti-horário e 13 vórtices no sentido horário.



(a) Componente solenoidal, os pontos em azul representam vórtices no sentido horário, já os pontos em vermelho representam os vórtices no sentido anti-horário.



(b) Componente irrotacional, os pontos em verde representam fontes, já os pontos em magenta representam sorvedouros.

Figura 31 – Singularidades sobre o campo usado no exemplo 4.4.

Conclusão

O objetivo deste trabalho era utilizar as funções de Green para espaços infinitos para obter as soluções de determinadas equações de Poisson e a partir de uma interpretação indireta de campos vetoriais juntamente com os potenciais dados pelas equações de Poisson determinar a Decomposição de Helmholtz-Hodge (HHD).

Inicialmente estudamos os métodos de diferenças finitas (MDF), onde vimos como aproximar localmente as derivadas ordinárias uma função real através de uma combinação da própria função com suas derivadas de ordem menores. Vimos também o mesmo estudo de aproximação da derivadas parciais de uma função real de várias variáveis.

Mediante essas ferramentas, estudamos maneiras de implementar os operadores diferenciais Gradiente e Divergente além de resolver equações de Poisson para as condições de fronteira mais usuais. Neste momento encontramos obstáculos para implementar a resolução das equações de Poisson para domínios não-retangulares, uma vez que para cada domínio dado se faria necessário o seu estudo de fronteira elevando drasticamente o custo para sua implementação e computação.

A partir da metodologia exposta por [Petronetto et al., 2010] para a resolução da HHD usando o método SPH usando as condições de fronteira Paralelo-Normal, vimos que precisaríamos dos operadores diferenciais além de montar e resolver equações de Poisson. Daí nós adaptamos a metodologia para o uso do MDF.

A Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge (HHD*) apresentada por [Bhatia et al., 2014] permite realizar a HHD sem a imposição de condições de fronteira, mediante uma interpretação indireta de alguns campos vetoriais específicos. Para isso faz-se necessário uso das funções de Green para espaços infinitos (ou solução fundamental da equação de Laplace), por esse motivo foi utilizado uma estratégia de estender o domínio do campo para todo o espaço de forma a utilizar tais funções. A partir daí obtemos a possibilidade de realizar a HHD em uma infinidade de novos problemas, principalmente a viabilidade de se realizar a decomposição local. Contudo poderia ser indagado a possibilidade de uma solução integral para a equação de Poisson diretamente no domínio do campo, e a resposta é nem sempre. Teoricamente é possível, contudo, uma vez que as funções de

Green para domínios limitados dependem obviamente do domínio, tal solução na prática é inviável pois não há uma fórmula fechada para qualquer domínio.

Exibimos exemplos em que a decomposição impondo condições de fronteira Paralelo-Normal (HHD-PN) não pode ser aplicada, uma vez que seu problema não está bem definido, já com as condições Normal-Paralelo (HHD-NP) obtemos resultados que não são os esperados. Além disso apresentamos um exemplo que expõem a importância de conhecermos informações adicionais do problema, onde obtemos duas decomposições distintas para um mesmo campo vetorial.

Embora todos os resultados obtidos foram no espaço bidimensional, tanto a decomposição natural quanto a decomposição por imposição de condições de fronteira são válidas para o espaço tridimensional. Contudo essa extensão exigirá um custo computacional enorme comparado ao caso bidimensional, haja vista que para a HHD-NP ou HHD-PN teremos um sistema linear muito maior para a componente irrotacional e três sistemas para a componente solenoidal, já para HHD* teremos mais integrais a serem realizadas e de maior ordem.

Vale ressaltar que realizamos testes com o método *mldivide* (contra-barras) do matlab, é um método de solução de sistema linear que identifica, para cada matriz, o melhor método dentre alguns já pré-definidos como QR, LU, LDL e outros. Os resultados obtidos foram os mesmos que utilizando o GMRES, embora esse não esteja contemplado pelo *mldivide*.

Em trabalhos futuros, gostaríamos de implementar a HHD* utilizando o Método de Elementos Finitos para podermos utilizar domínios mais gerais até mesmo superfícies, bem como verificar a possibilidade de estender a decomposição natural para métodos que não requeiram estrutura de malha, em particular o SPH.

Pretendemos também averiguar a viabilidade de se obter uma extensão intermediária do campo vetorial para aí então realizar a extensão para todo o espaço. O motivo para esse estudo apresentamos no Exemplo 4.1, mais precisamente na Figura 19, a qual exibimos que os piores resultados estão sobre a fronteira, mesmo sem condições sobre ela. Tais resultados já eram esperados, haja vista que um ponto de fronteira não possui a mesma disposição de vizinhos que os pontos interiores.

Referências

- [Arfken and Weber, 2005] Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2005). *Mathematical methods for physicists*. Academic press. Citado na página 41.
- [Barrett et al., 1994] Barrett, R., Berry, M., Chan, T. F., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C., and der Vorst, H. V. (1994). *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*. SIAM. Citado na página 53.
- [Bhatia et al., 2013a] Bhatia, H., Norgard, G., Pascucci, V., and Bremer, P. (2013a). Comments on the “meshless helmholtz-hodge decomposition”. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 19(3):527–528. Citado na página 42.
- [Bhatia et al., 2013b] Bhatia, H., Norgard, G., Pascucci, V., and Bremer, P.-T. (2013b). The helmholtz-hodge decomposition — a survey. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*, 19(8):1386–1404. Citado na página 16.
- [Bhatia et al., 2014] Bhatia, H., Pascucci, V., and Bremer, P.-T. (2014). The natural helmholtz-hodge decomposition for open-boundary flow analysis. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 20(11):1566–1578. Citado 4 vezes nas páginas 17, 38, 44 e 68.
- [Choi et al., 2009] Choi, H., Choi, H., and Yoo, J. (2009). *Computational Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg. Citado na página 15.
- [Courant et al., 1952] Courant, R., Isaacson, E., and Rees, M. (1952). On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5(3):243–255. Citado na página 16.
- [Cuminato and Meneguette, 2013] Cuminato, J. A. and Meneguette, M. (2013). *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. Rio de Janeiro: SBM. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 29.

- [Evans, 2010] Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society. Citado na página 32.
- [Helmholtz, 1858] Helmholtz, H. (1858). Über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 55:25–55. Citado na página 15.
- [Helmholtz, 1867] Helmholtz, H. (1867). Lxiii. on integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33(226):485–512. Citado na página 15.
- [Ladyzhenskaya, 1963] Ladyzhenskaya, O. A. (1963). *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, volume 76. Gordon and Breach New York. Citado na página 15.
- [Lamb, 1932] Lamb, H. (1932). Hydrodynamics. *Cambridge UP*, pages 236–241. Citado na página 15.
- [Lima, 2014] Lima, E. L. (2014). *Curso de Análise*, volume 2 of *Coleção Projeto Euclides*. IMPA. Citado na página 18.
- [Merzkirch, 2012] Merzkirch, W. (2012). *Flow Visualization*. Elsevier Science. Citado na página 15.
- [Moysés, 2006] Moysés, H. N. (2006). *Curso de Física Básica*, volume 3. Blucher, 1 edition. Citado na página 45.
- [Petronetto, 2008] Petronetto, F. (2008). *A equação de Poisson e a decomposição de Helmholtz-Hodge com operadores SPH*. PhD thesis, Ph. D. dissertation, PUC-Rio. Citado na página 65.
- [Petronetto et al., 2010] Petronetto, F., Paiva, A., Lage, M., Tavares, G., Lopes, H., and Lewiner, T. (2010). Meshless helmholtz-hodge decomposition. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*, 16(2):338–349. Citado 4 vezes nas páginas 16, 52, 65 e 68.
- [Polthier and Preuß, 2003] Polthier, K. and Preuß, E. (2003). Identifying vector field singularities using a discrete hodge decomposition. In *Visualization and Mathematics III*, pages 113–134. Springer. Citado 3 vezes nas páginas 16, 40 e 65.
- [Stone and Goldbart, 2009] Stone, M. and Goldbart, P. (2009). *Mathematics for physics: a guided tour for graduate students*. Cambridge University Press. Citado na página 37.
- [Wiebel et al., 2004] Wiebel, A., Garth, D.-M. C., and Visualisierungssysteme, A. (2004). *Feature Detection in Vector Fields Using the Helmholtz-Hodge Decomposition*. Diploma

-
- thesis, University of Kaiserslautern-Germany. Citado 4 vezes nas páginas 9, 17, 43 e 44.

Convergência dos Operadores

Apresentaremos os resultados obtidos pelo teste de convergência dos operadores diferenciais Gradiente e Divergente na Figura 32, através da norma da matriz dos erros absolutos pontuais. Para ficar claro a convergência utilizamos a norma do máximo, esta norma para esses casos é melhor, muito embora a norma L^2 também convirja sua convergência é aparentemente lenta, uma vez que é a soma ao quadrado de todos os elementos do vetor. Na Figura 32 representamos por ∇f o resultado analítico do gradiente aplicado nos pontos da malha e representamos por ∇F o resultado obtido pela aplicação do operador gradiente discreto sobre as amostras da função f sobre os pontos da malha. De maneira análoga representamos o divergente.

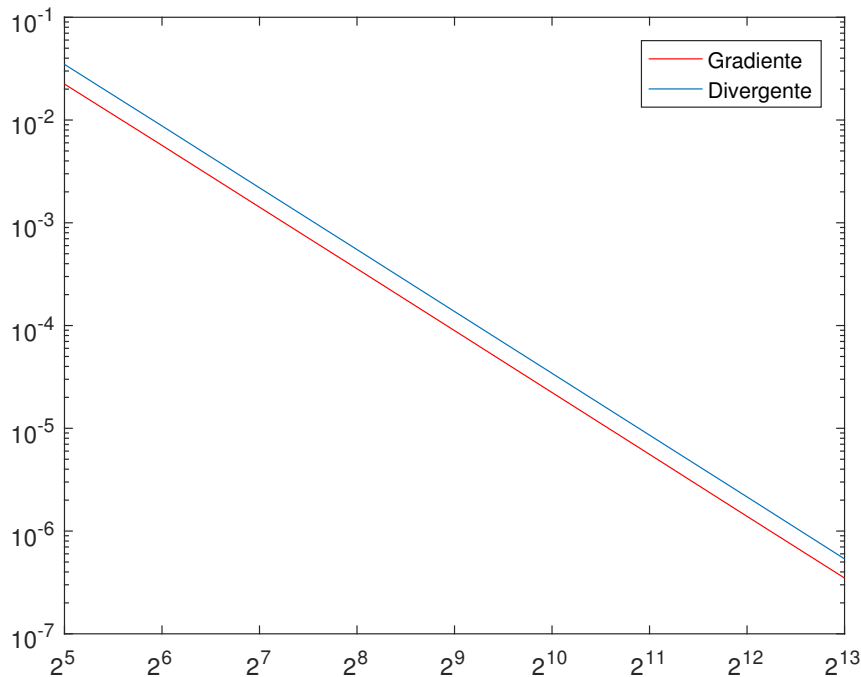


Figura 32 – Análise de convergência dos operadores diferenciais, gradiente e divergente. O refinamento se deu pelo aumento da partição para cada instante, sendo os valores dados por $2^l \times 2^l$ onde $l \in \{4, \dots, 10\}$.